Lösungen zu den Textaufgaben zum Mittelwert einer Funktion

Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner eine reelle Zahl a so, dass der Mittelwert der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ über dem Integral [0;a] den Wert 9 annimmt.	$\frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x)dx = 9$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right]_0^a = 9$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot (-\frac{1}{3}a^3 + 2a^2 + 6a) = 9$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^2 + 2a + 6 = 9 \;/-9$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^2 + 2a - 3 = 0 \;/\cdot(-3)$ $\Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$ $\Leftrightarrow a_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9} = 3$	Für a = 3 ist der Mittelwert 9.
2. Der Goldpreis wird in den ersten 4 Tagen durch die Funktion $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 20x + 30$ modelliert, x in Tagen, f(x) in €/g. a. Berechnen Sie den Durchschnittspreis in den ersten 4 Tagen. b. Berechnen Sie, nach wieviel Tagen der Durchschnittspreis 36€/g beträgt. c. Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Preis 36€/g beträgt.	a. $\frac{1}{4} \cdot \int_0^4 f(x)dx$ $= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 30x\right]_0^4 = \frac{1}{4} \cdot 152 = 38$ b. $\frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x)dx = 36$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 30x\right]_0^a = 36$ $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot (\frac{1}{2}a^4 - 4a^3 + 10a^2 + 30a) = 36$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}a^3 - 4a^2 + 10a + 30 = 36$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}a^3 - 4a^2 + 10a - 6 = 0 \Leftrightarrow a \approx 0{,}869$ c. $2x^3 - 12x^2 + 20x + 30 = 36 \Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 20x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 0{,}38 \vee x \approx 2{,}62 \vee x \approx 3$	a. Der Durchschnittspreis in den ersten 4 Tagen beträgt 38€/g. b. Nach 0,87 Tagen (oder nach 20,856 Stunden) beträgt der Durchschnittspreis 36€/g. c. Nach 0,38, und 2,62 und nach 3 Tagen beträgt der Preis 36€/g.

3. Die Wechselrate zwischen Dollar und Euro wird durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}044x^3 - 0{,}33x^2 + 0{,}56x + 1$ modelliert, x in Stunden mit $0 \leq x \leq 5$, f(x) stellt den Wert eines Dollars in Euro dar. a. Bestimmen Sie, wie viel Euros man für einen Dollar nach 3 Stunden erhält. b. Berechnen Sie den durchschnittlichen Wechselkurs in den ersten drei Stunden. c. Berechnen Sie die durchschnittliche Änderungsrate des Wechselkurses in den ersten vier Stunden und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. d. Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt man am besten Euros in Dollars umtauschen sollte.	a. $f(3) = 0{,}898$ b. $\frac{1}{3} \cdot \int_0^3 f(x)dx$ $= \frac{1}{3} \cdot [0{,}011x^4 - 0{,}11x^3 + 0{,}28x^2 + x]_0^3$ $= \frac{1}{3} \cdot 3{,}441 = 1{,}147$ c. $\frac{1}{4} \cdot [f(4) - f(0)] = \frac{1}{4} \cdot [0{,}776 - 1] = -0{,}056$ d. Gesucht: Minimum $f'(x) = 0{,}132x^2 - 0{,}66x + 0{,}56$ $f''(x) = 0{,}264x - 0{,}66$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1{,}08 \vee x \approx 3{,}92$ $f''(1{,}08) \approx -0{,}37 < 0 \Rightarrow$ HP $f''(3{,}92) \approx 0{,}37 > 0 \Rightarrow$ TP $\quad f(3{,}92) \approx 0{,}775$ Ränder: $f(0) = 1$; $f(5) = 1{,}05 > 0{,}775$	a. Nach 3 Stunden erhält man für einen Dollar ca. 0,9 €. b. Der durchschnittliche Wechselkurs in den ersten drei Stunden beträgt pro Dollar 1,147 Euro. c. Die durchschnittliche Änderungsrate beträgt −0,056, d.h. im Schnitt fällt der Wechselkurs eines Dollars zum € in den ersten vier Stunden um 5,6 Cent pro Stunde. d. Man sollte am besten nach ca. 4 Tagen umtauschen.
4. Die Geschwindigkeit eines Autos wird durch die Funktion $f(x) = -0{,}3x^2 + 6x$ modelliert, x in Sekunden mit $0 \leq x \leq 12$, f(x) in m/sec. a. Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit in den ersten 8 Sekunden in km/h. b. Berechnen Sie, wann das Auto am schnellsten fährt. c. Berechnen Sie, wie weit das Auto nach 7 Sekunden gefahren ist.	a. $\frac{1}{8} \cdot \int_0^8 f(x)dx = \frac{1}{8} \cdot [-0{,}1x^3 + 3x^2]_0^8 = \frac{1}{8} \cdot 140{,}8 = 17{,}6$ 17,6 m/sec = 63,36km/h b. Gesucht: Maximum: $f'(x) = -0{,}6x + 6$ und $f''(x) = -0{,}6$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ $f''(10) = -0{,}6 < 0 \Rightarrow$ HP und $f(10) = 30$ [Ränder: $f(0) = 0$ und $f(12) = 28{,}8$] c. $\int_0^7 f(x)dx = [-0{,}1x^3 + 3x^2]_0^7 = 112{,}7$	a. Die durchschnittliche Geschwindigkeit in den ersten 8 Sekunden beträgt 63,36 km/h. b. Das Auto fährt nach 10 Sekunden am schnellsten. c. Das Auto ist 112,7m gefahren.