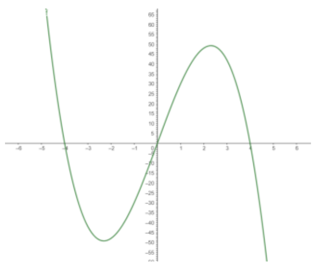
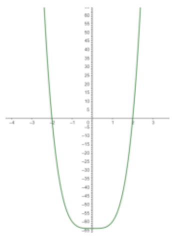
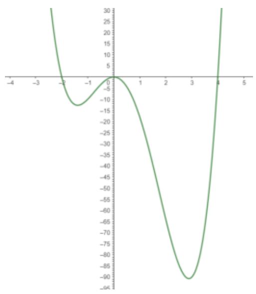
Lösung zu der Übung zu ganzrationalen Funktionen (ohne Differentialrechnung)

<table>
<tr>
<td>
1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^3 + 32x$, $x \in \mathbb{R}$.
a. Berechnen Sie die Nullstellen.
b. Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse.
c. Zeigen Sie, dass der Graph punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist.
d. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
e. Skizzieren Sie die Funktion.
</td>
<td>
a. $-2x^3 + 32x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 16) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4 \vee x = 4$
b. Sy (0|0)
c. $f(-x) = -2 \cdot (-x)^3 + 32 \cdot (-x) = 2x^3 - 32x$
und $-f(x) = -(-2x^3 + 32x) = 2x^3 - 32x$
also $f(-x) = -f(x)$ => f ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt
d. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
e.

</td>
</tr>
<tr>
<td>
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x^4 - 64$, $x \in \mathbb{R}$.
a. Berechnen Sie die Nullstellen.
b. Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse.
c. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Punkt P(−3|280) auf dem Graphen von f liegt.
d. Zeigen Sie, dass der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
e. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
f. Skizzieren Sie die Funktion.
</td>
<td>
a. $4x^4 - 64 = 0 \Leftrightarrow 4x^4 = 64 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
b. Sy (0|−64)
c. $f(-3) = 4 \cdot (-3)^4 - 64 = 324 - 64 = 260 \neq 280$
Der Punkt liegt nicht auf f.
d. $f(-x) = 4 \cdot (-x)^4 - 64 = 4x^4 - 64$
also $f(-x) = f(x)$ => f ist achsensymmetrisch zur y-Achse
e. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
f.

</td>
</tr>
<tr>
<td>
3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 16x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
a. Berechnen Sie die Nullstellen.
b. Zeigen Sie, dass der Graph nicht achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
c. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
d. Skizzieren Sie die Funktion.
</td>
<td>
a. $2x^4 - 4x^3 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 8x^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 2x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 8} = 1 \pm 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \vee x = -2$
b. $f(-x) = 2 \cdot (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 - 16 \cdot (-x)^2 = 2x^4 + 4x^3 - 16x^2 \neq f(x)$
=> f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse
c. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
d.

</td>
</tr>
</table>