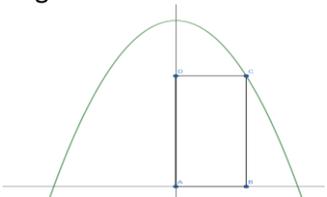
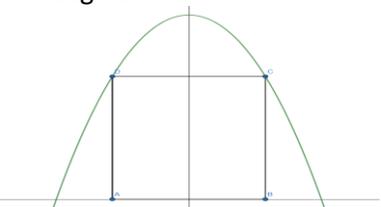
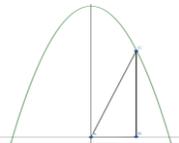
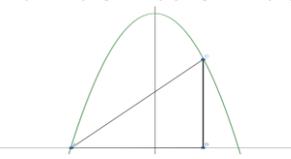
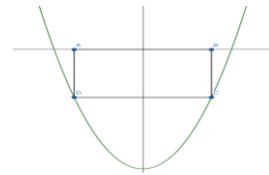
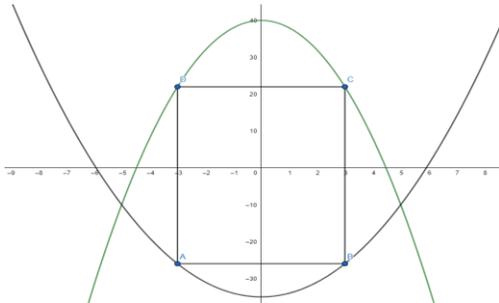


Lösungen zu den Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen 1: in Graphen eingeschriebene Figuren

Aufgabe	Lösung
<p>1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^2 + 54$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein Rechteck ABCD eingeschrieben wird. Die Punkte A(0/0) und B(a/0) liegen auf der x-Achse, C auf dem Graphen und D auf der y-Achse, $a \in \mathbb{R}, a > 0$.</p> <p>a. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat!</p> <p>b. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Umfang hat!</p> 	<p>a. Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 54 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{27} \approx \pm 5,196$, also $0 \leq a \leq 5,196$ $A(a) = a \cdot f(a) = a \cdot (-2a^2 + 54) = -2a^3 + 54a$ $A'(a) = -6a^2 + 54$ und $A''(a) = -12a$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 54 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -3$ (nicht relevant) $A''(3) = -36 < 0 \Rightarrow$ Maximum [Ränder sind nicht relevant, da es dann kein Rechteck gibt.] Für $a = 3$ ist der Flächeninhalt maximal.</p> <p>b. $U(a) = 2a + 2 \cdot f(a) = 2a + 2 \cdot (-2a^2 + 54) = 2a - 4a^2 + 108$ $U'(a) = 2 - 8a$ und $U''(a) = -8$ $U'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0,25$ $U''(a) = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximum Für $a = 0,25$ ist der Umfang maximal.</p>
<p>2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^4 + 80$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck ABCD eingeschrieben wird. Die Punkte A und B(a/0) liegen auf der x-Achse, C und D auf dem Graphen von f, $a \in \mathbb{R}, a > 0$.</p> <p>a. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat!</p> <p>b. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Umfang hat!</p> 	<p>a. Nullstellen: $-x^4 + 80 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{80} \approx \pm 2,99$, also $0 \leq a \leq 2,99$ $A(a) = 2a \cdot f(a) = 2a \cdot (-a^4 + 80) = -2a^5 + 160a$ $A'(a) = -10a^4 + 160$ und $A''(a) = -40a^3$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -10a^4 + 160 = 0 \Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$ (nicht relevant) $A''(2) = -320 < 0 \Rightarrow$ Maximum [Ränder sind nicht relevant, da es dann kein Rechteck gibt.] Für $a = 2$ ist der Flächeninhalt maximal.</p> <p>b. $U(a) = 4a + 2 \cdot f(a) = 4a + 2 \cdot (-a^4 + 80) = 4a - 2a^4 + 160$ $U'(a) = 4 - 8a^3$ und $U''(a) = -24a^2$ $U'(a) = 0 \Leftrightarrow 4 - 8a^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 = 0,5 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{0,5} \approx 0,79$ $U''(0,79) = -18,96 < 0 \Rightarrow$ Maximum Für $a = 0,79$ ist der Umfang maximal.</p>

<p>3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -6x^2 + 112,5$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein Dreieck ABC eingeschrieben wird. Die Punkte A und B(a/0) liegen auf der x-Achse, C liegt auf dem Graphen von f, $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat!</p> 	<p>Nullstellen: $-6x^2 + 112,5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{18,75} \approx \pm 4,33$, also $0 \leq a \leq 4,33$</p> $A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (-6a^2 + 112,5) = -3a^3 + 56,25a$ $A'(a) = -9a^2 + 56,25 \text{ und } A''(a) = -18a$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -9a^2 + 56,25 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 6,25 \Leftrightarrow a = 2,5 \vee a = -2,5 \text{ (nicht relevant)}$ $A''(2,5) = -45 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$ <p>[Ränder sind nicht relevant, da es dann kein Dreieck gibt.]</p> <p>Für $a = 2,5$ ist der Flächeninhalt maximal.</p>
<p>4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -4x^2 + 144$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein Dreieck ABC eingeschrieben wird. Die Punkte A und B liegen auf der x-Achse, A auf dem Schnittpunkt von f mit der x-Achse, C liegt auf dem Graphen von f. Berechnen Sie, für welchen Wert das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat!</p> 	<p>Nullstellen: $-4x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{36} \approx \pm 6$, also $0 \leq a \leq 6$</p> $A(a) = \frac{1}{2} \cdot (a + 6) \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot (a + 6) \cdot (-4a^2 + 144) = -2a^3 + 72a - 12a^2 + 432$ $A'(a) = -6a^2 + 72 - 24a \text{ und } A''(a) = -12a - 24$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 72 - 24a = 0 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -6 \text{ (nicht relevant)}$ $A''(2) = -48 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$ <p>[Ränder sind nicht relevant, da es dann kein Dreieck gibt.]</p> <p>Für $a = 2$ ist der Flächeninhalt maximal.</p>
<p>5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 15$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein Rechteck ABCD eingeschrieben wird. Die Punkte A(-a/0) und B(a/0) liegen auf der x-Achse, C(a/f(a)) und D(-a/f(-a)) auf dem Graphen von f, $a \in \mathbb{R}, a > 0$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Fertigen Sie eine Skizze an! Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat! Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Umfang hat! 	<ol style="list-style-type: none"> s. links Nullstellen: $x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15} \approx \pm 3,87$, also $0 \leq a \leq 3,87$ $A(a) = 2a \cdot (-f(a)) = 2a \cdot (-a^2 + 15) = -2a^3 + 30a$ $A'(a) = -6a^2 + 30 \text{ und } A''(a) = -12a$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 5 \Leftrightarrow a = \sqrt{5} \approx 2,24 \vee a = -\sqrt{5} \text{ (nicht relevant)}$ $A''(2,24) = -26,88 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$ <p>Für $a = 2,24$ ist der Flächeninhalt maximal.</p> <ol style="list-style-type: none"> $U(a) = 4a + 2 \cdot (-f(a)) = 4a + 2 \cdot (-a^2 + 15) = 4a - 2a^2 + 30$ $U'(a) = 4 - 4a^2 \text{ und } U''(a) = -8a$ $U'(a) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1 \text{ (nicht relevant)}$ $U''(1) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$ <p>Für $a = 1$ ist der Umfang maximal.</p>

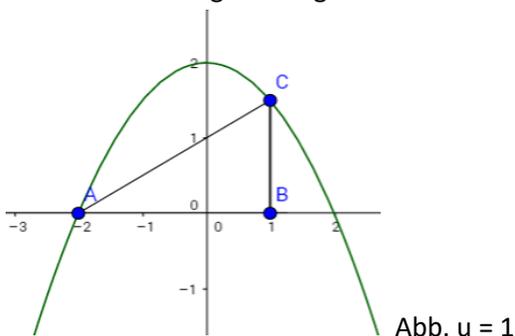
6. Gegeben sind die Funktion $f(x) = -2x^2 + 40$ und $g(x) = x^2 - 35$. f und g begrenzen eine Fläche, in die ein zur y -Achse symmetrisches Rechteck eingeschrieben werden soll. Dabei soll eine Einheit auf der x - und y -Achse jeweils 1cm sein.
- Berechnen Sie alle für die Aufgabe relevanten Punkte und fertigen Sie damit eine Skizze an!
 - Berechnen Sie, für welchen Wert das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat und berechnen Sie die Größe der Fläche!



- Schnittpunkte: $-2x^2 + 40 = x^2 - 35 \Leftrightarrow -3x^2 = -75 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$
- $A(a) = 2a \cdot [g(a) + (-f(a))] = 2a \cdot [-2a^2 + 40 - (a^2 - 35)]$
 $= 2a \cdot [-2a^2 + 40 - a^2 + 35] = 2a \cdot [-3a^2 + 75] = -6a^3 + 150a$
 $A'(a) = -18a^2 + 150$ und $A''(a) = -36a$
 $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -18a^2 + 150 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 8,3 \Leftrightarrow a \approx 2,89 \vee a = -\sqrt{8,3}$ (nicht relevant)
 $A''(2,89) \approx -104,04 < 0 \Rightarrow$ Maximum
 $A(2,89) = 288,675$

Für $a = 2,89$ ist der Flächeninhalt mit $288,675 \text{ cm}^2$ maximal.

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0,5x^2 + 2$. Die Punkte $A(-2/0)$, $B(u/0)$ und $C(u/f(u))$ mit $0 \leq u \leq 2$ bilden ein Dreieck! Bestimmen Sie u so, dass das Dreieck ABC den größtmöglichen Flächeninhalt hat!

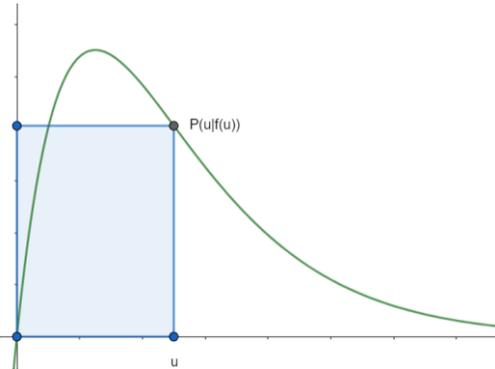


- $0 \leq u \leq 2$ Was soll maximal sein? $A = 0,5 \cdot a \cdot h$
 NB: $a = 2 + u$ und $h = f(u) = -0,5u^2 + 2$
 Zielfunktion: $A(u) = 0,5 \cdot a \cdot h = 0,5 \cdot (2 + u) \cdot (-0,5u^2 + 2)$
 $= (1 + 0,5u) \cdot (-0,5u^2 + 2) = -0,5u^2 + 2 - 0,25u^3 + u$
 $\Leftrightarrow A(u) = -0,25u^3 - 0,5u^2 + u + 2$

- $A'(u) = -0,75u^2 - u + 1$ $A''(u) = -1,5u - 1$
 $A'(u) = -0,75u^2 - u + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow u = -2 (\notin D(f)) \vee u = 0,6 \approx 0,67$
 $A''(0,67) = -2,005 < 0 \Rightarrow$ Maximum $A(0,67) = 2,37$
 Ränder: $A(0) = 2$ $A(2) = 0$

Für $u = 0,6$ hat das Dreieck den größtmöglichen Flächeninhalt, nämlich $2,37 \text{ FE}$.

8. Auf dem Graphen von $f(x) = 60x \cdot e^{-0,8x}$ liegt der Punkt $P(u|f(u))$, $u > 0$. Wie muss u gewählt werden, damit der Inhalt des achsenparallelen Rechtecks maximal wird?



$$A(u) = u \cdot 60u \cdot e^{-0,8u} = 60u^2 \cdot e^{-0,8u}$$

$$A'(u) = 120u \cdot e^{-0,8u} + 60u^2 \cdot (-0,8) \cdot e^{-0,8u}$$

$$= (120u - 48u^2) \cdot e^{-0,8u}$$

$$A'(u) = 0 \Leftrightarrow 120u - 48u^2 = 0 \vee e^{-0,8u} = 0$$

$$\Leftrightarrow u \cdot (120 - 48u) = 0 \vee e^{-0,8u} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow u = 0 \ (\notin D(f)) \vee u = 2,5$$

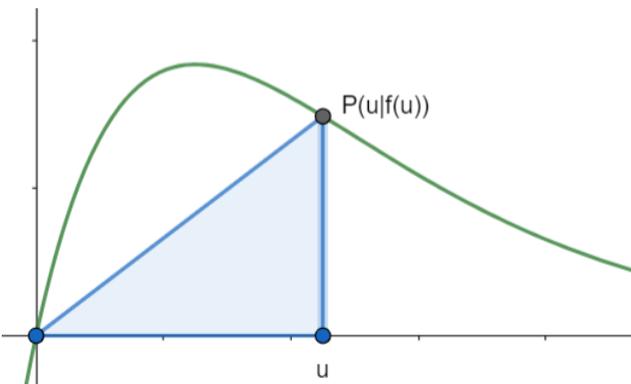
Untersuchung auf VZW:

$$A'(1) = 72 \cdot e^{-0,8} > 0$$

$$A'(3) = -24 \cdot e^{-2,4} < 0 \quad \text{VZW von + nach -} \Rightarrow \text{HP}$$

Für $u = 2,5$ ist der Flächeninhalt maximal.

9. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 10x \cdot e^{-0,4x}$. f begrenzt mit der x -Achse eine Fläche, der ein Dreieck eingeschrieben wird. Berechnen Sie, für welchen Wert von $u > 0$ das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat!



$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot 10u \cdot e^{-0,4u} = 5u^2 \cdot e^{-0,4u}$$

$$A'(u) = 10u \cdot e^{-0,4u} + 5u^2 \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4u}$$

$$= (10u - 2u^2) \cdot e^{-0,4u}$$

$$A'(u) = 0 \Leftrightarrow 10u - 2u^2 = 0 \vee e^{-0,4u} = 0$$

$$\Leftrightarrow u \cdot (10 - 2u) = 0 \vee e^{-0,4u} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow u = 0 \ (\notin D(f)) \vee u = 5$$

Untersuchung auf VZW:

$$A'(1) = 8 \cdot e^{-0,4} > 0$$

$$A'(6) = -12 \cdot e^{-2,4} < 0 \quad \text{VZW von + nach -} \Rightarrow \text{HP}$$

Für $u = 5$ ist der Flächeninhalt maximal.