# *Lösung zu den Übungen zur linearen Unabhängigkeit/ Kollinearität*

| *Aufgabe* | *Rechenweg* |
|---|---|
| 1.a. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$<br><br>b. $\vec{a} = \begin{pmatrix}-8\\7\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}16\\-14\end{pmatrix}$<br><br>c. $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$<br><br>d. $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$<br><br>e. Wie viele linear unabhängige Vektoren kann es in einem zweidimensionalen Raum höchstens geben? | a. $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ (oder: $\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} = 1{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$), also linear abhängig (kollinear)<br><br>b. $\begin{pmatrix}-8\\7\end{pmatrix} = (-0{,}5)\cdot\begin{pmatrix}16\\-14\end{pmatrix}$, also linear abhängig (kollinear)<br><br>c. $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}0=r\\1=0\end{array}\right\rvert$; da die 2. Zeile einen Widerspruch darstellt, sind die Gleichungen nicht lösbar, also sind die Vektoren linear unabhängig (nicht kollinear)<br><br>d. $\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} = 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$, also linear abhängig (kollinear)<br><br>e. Es können höchstens zwei linear unabhängige Vektoren in einem zweidimensionalen Raum geben. |
| 2.a. $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}15\\-9\\-3\end{pmatrix}$<br><br>b. $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\18\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\-1\end{pmatrix}$<br><br>c. $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-11\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-7\\-4\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ | a. $3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\-3\end{pmatrix}$, also linear abhängig (kollinear)<br><br>b. $\left\lvert\begin{array}{c}6=-2r\\18=-6r\\4=-r\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}-3=r\\-3=r\\-4=r\end{array}\right\rvert$, d.h. linear unabhängig (kollinear)<br><br>c. $\left\lvert\begin{array}{c}0=-r-7s+4t\\0=-3r-4s+3t\\0=-11r-2s-t\end{array}\right\rvert\begin{array}{c}I\cdot 3\\II\cdot(-4)\\III\cdot 12\end{array}\Leftrightarrow\left\lvert\begin{array}{c}0=-3r-21s+12t\\0=12r+16s-12t\\0=-132r-24s-12t\end{array}\right\rvert\begin{array}{c}I+II\\I+III\\III\end{array}\Leftrightarrow\left\lvert\begin{array}{c}0=9r-5s\\0=-135r-45s\\0=-132r-24s-12t\end{array}\right\rvert\begin{array}{c}I\cdot(-9)\\II\\III\end{array}$<br>$\Leftrightarrow\left\lvert\begin{array}{c}0=-81r+45s\\0=-135r-45s\\0=-132r-24s-12t\end{array}\right\rvert\begin{array}{c}I+II\\II\\III\end{array}\Leftrightarrow\left\lvert\begin{array}{c}0=-216r\\0=-6480r-1665s\\0=-132r-24s-12t\end{array}\right\rvert\Leftrightarrow\left\lvert\begin{array}{c}0=r\\0=s\\0=t\end{array}\right\rvert$, also linear unabhängig. |

| | |
|---|---|
| d. $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ | d. $\left\lvert\begin{array}{l}0=0+3s+0\\0=0+0+2t\\0=2r+0+0\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{l}0=3s\\0=2t\\0=2r\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{l}0=r\\0=s\\0=t\end{array}\right\rvert$ => Die Vektoren sind linear unabhängig. |
| e. $\vec{a} = \begin{pmatrix}16\\-12\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\8\\6\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}8\\-2\\4{,}5\end{pmatrix}$ | e. $\left\lvert\begin{array}{c}0=16r+8t\\0=-12r+8s-2t\\0=3r+6s+4{,}5t\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}t=-2r\\0=-12r+8s-2\cdot(-2r)\\0=3r+6s+4{,}5\cdot(-2r)\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}t=-2r\\0=-12r+8s+4r\\0=3r+6s-9r\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}t=-2r\\0=-8r+8s\\0=-6r+6s\end{array}\right\rvert \begin{array}{c}I\\II\cdot(-3)\\III\cdot 4\end{array}$ <br> $\Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}t=-2r\\0=24r-24s\\0=-24r+24s\end{array}\right\rvert \begin{array}{c}I\\II\\III+II\end{array} \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}t=-2r\\0=24r-24s\\0=0\end{array}\right\rvert \begin{array}{c}I\\II\\III\end{array}$ => $\infty - viele\ Lösungen$, d.h. linear abhängig |
| f. $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\9\\-2\end{pmatrix}, \vec{b} = -2\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix}, \vec{c} = 4\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ | f. $\left\lvert\begin{array}{c}0=6r-6s+12t\\0=9r+4r+4t\\0=-2r-18r+16s\end{array}\right\rvert \begin{array}{c}I\cdot(-4)\\II\cdot 12\\III\cdot 3\end{array} \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}0=-24r+24s-48t\\0=108r+48r+48t\\0=-6r-54r+48s\end{array}\right\rvert \begin{array}{c}I\\II+I\\III+I\end{array} \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}0=-24r+24s-48t\\0=84r+72r\\0=-30r-30r\end{array}\right\rvert \begin{array}{c}I\\II\cdot 5\\III\cdot 12\end{array}$ <br> $\Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}0=-24r+24s-48t\\0=420r+360r\\0=-360r-360r\end{array}\right\rvert \begin{array}{c}I\\II\\III+II\end{array} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{c}0=-24r+24s-48t\\0=420r+360r\\0=60r\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{l}0=r\\0=s\\0=t\end{array}\right\rvert$, also linear unabhängig. |
| g. Wie viele linear unabhängige Vektoren kann es in einem drei-dimensionalen Raum höchstens geben? | g. Es gibt höchstens drei linear unabhängige Vektoren in einem dreidimensionalen Raum. |