Lösungen zum Krümmungsverhalten von Funktionen

Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1. $f(x) = -2x^2 - 8x + 3$	Die erste und zweite Ableitung aufstellen: $f'(x) = -4x - 8$ $f''(x) = -4 < 0$ => f ist überall rechtsgekrümmt	f ist überall rechtsgekrümmt
2. $f(x) = x^3 - 3x$	Die erste und zweite Ableitung aufstellen: $f'(x) = 3x^2 - 3$ und $f''(x) = 6x$ Die Nullstellen der zweiten Ableitung berechnen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Untersuchung, wo $f''(x)$ größer/kleiner als Null ist: $x < 0$: z.B. $x = -3$: $f''(-3) = -18$ => $f''(x) < 0$ für $x < 0$ => rechtsgekrümmt $x > 0$: z.B. $x = 4$: $f''(4) = 24$ => $f''(x) > 0$ für $x > 0$ => linksgekrümmt	$x < 0$: rechtsgekrümmt $x > 0$: linksgekrümmt
3. $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + x - 6$	Die erste und zweite Ableitung aufstellen: $f'(x) = -6x^2 + 8x + 1$ und $f''(x) = -12x + 8$ Die Nullstellen der zweiten Ableitung berechnen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ Untersuchung, wo $f''(x)$ größer/kleiner als Null ist: $x < \frac{2}{3}$: z.B. $x = 0$: $f''(0) = 8$ => $f''(x) > 0$ für $x < \frac{2}{3}$ => linksgekrümmt $x > \frac{2}{3}$: z.B. $x = 1$: $f''(1) = -4$ => $f''(x) < 0$ für $x > 0$ => rechtsgekrümmt	$x < \frac{2}{3}$: linksgekrümmt $x > \frac{2}{3}$: rechtsgekrümmt

4. $f(x) = 3x^5 - 5x^4$	Die erste und zweite Ableitung aufstellen: $f'(x) = 15x^4 - 20x^3$ und $f''(x) = 60x^3 - 60x^2$ Die Nullstellen der zweiten Ableitung berechnen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 60x - 60 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ Untersuchung, wo $f''(x)$ größer/kleiner als Null ist: $x < 0$: z.B. $x = -1$: $f''(-1) = -120 \Rightarrow f''(x) < 0$ für $x < 0$ => rechtsgekrümmt $0 < x < 1$: z.B. $x = 0{,}5$: $f''(0{,}5) = -7{,}5 \Rightarrow f''(x) < 0$ für $0 < x < 1$ => rechtsgekrümmt $x > 1$: z. B. $x = 2$: $f''(2) = 240 \Rightarrow f''(x) > 0$ für $x > 1$ => linksgekrümmt	$x < 1$: rechtsgekrümmt $x > 1$: linksgekrümmt
5. $f(x) = -\frac{25}{12}x^4 + 8x^2$	Die erste und zweite Ableitung aufstellen: $f'(x) = -\frac{25}{3}x^3 + 16x$ und $f''(x) = -25x^2 + 16$ Die Nullstellen der zweiten Ableitung berechnen: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -25x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \vee x = -\frac{4}{5}$ Untersuchung, wo $f''(x)$ größer/kleiner als Null ist: $x < -\frac{4}{5}$: z.B. $x = -1$: $f''(-1) = -9 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ für $x < -\frac{4}{5}$ => rechtsgekrümmt $-\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}$: z.B. $x = 0$: $f''(0) = 16 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ für $-\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}$ => linksgekrümmt $x > \frac{4}{5}$: z.B. $x = 1$: $f''(1) = -9 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ für $x > \frac{4}{5}$ => rechtsgekrümmt	$x < -\frac{4}{5}$: rechtsgekrümmt $-\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}$: linksgekrümmt $x > \frac{4}{5}$: rechtsgekrümmt