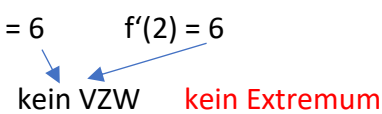
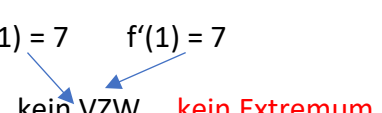
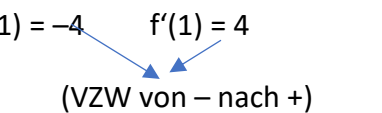
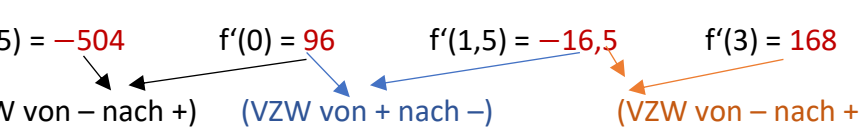
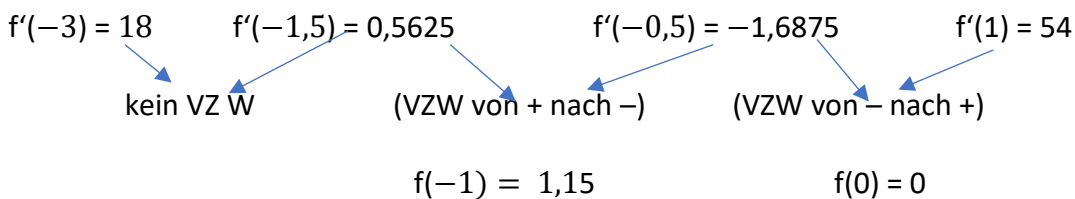


Lösungen zu den Übungen zu Maximum und Minimum: VZW und besondere Funktionen

<p>Aufgabe 1</p> <p>a. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$ $f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$</p> <p>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$</p> <p>Untersuchung auf VZW bei f':</p> <p>$f'(0) = 6$ $f'(2) = 6$</p> <p style="margin-left: 40px;">  </p>
<p>b. $f(x) = x^7 + 3$ $f'(x) = 7x^6$</p> <p>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$</p> <p>Untersuchung auf VZW bei f':</p> <p>$f'(-1) = 7$ $f'(1) = 7$</p> <p style="margin-left: 40px;">  </p>
<p>c. $f(x) = x^4 + 12$ $f'(x) = 4x^3$</p> <p>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$</p> <p>Untersuchung auf VZW bei f':</p> <p>$f'(-1) = -4$ $f'(1) = 4$</p> <p style="margin-left: 40px;">  </p> <p>$f(0) = 12$ Minimum T(0/12)</p>
<p>d. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 60x^2 + 96x$ $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 120x + 96$</p> <p>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 12x^2 - 120x + 96 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2$</p> <p>Untersuchung auf VZW bei f':</p> <p>$f'(-5) = -504$ $f'(0) = 96$ $f'(1,5) = -16,5$ $f'(3) = 168$</p> <p style="margin-left: 40px;">  </p> <p>$f(-4) = -832$ $f(1) = 43$ $f(2) = 32$</p> <p>Minimum T₁(-4/-832) Maximum H(1/43) Minimum T₂(2/32)</p>
<p>e. $f(x) = 0,6x^5 + 3,75x^4 + 8x^3 + 6x^2$ $f'(x) = 3x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 12x$</p> <p>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \vee x = 0$</p>

Untersuchung auf VZW bei f' :

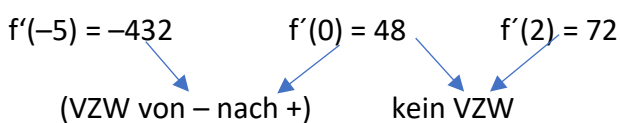


Maximum $H(-1/1,15)$ Minimum $T(0/0)$

f. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 42x^2 + 48x + 24$ $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 84x + 48$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 24x^2 - 84x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$ (doppelte Nullstelle)

Untersuchung auf VZW bei $f'(x)$:

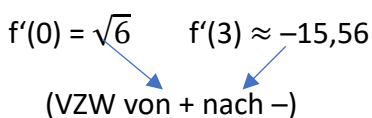


$f(-4) = -584$ **Minimum $(-4/-584)$**

g. $f(x) = \sqrt{6}x - 3x^2$ $f'(x) = \sqrt{6} - 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Untersuchung auf VZW bei $f'(x)$:



$f(\frac{1}{\sqrt{6}}) = 0,5$ **Maximum $H(\frac{1}{\sqrt{6}}/0,5)$**

Aufgabe 2

a. $f(x) = x \cdot (1 + x^2)^{-1}$

$f'(x) = 1 \cdot (1 + x^2)^{-1} + x \cdot (-1) \cdot 2x \cdot (1 + x^2)^{-2} = \frac{1}{(1+x^2)^1} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x^2)^1} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 / \cdot (1+x^2)^2$

$\Leftrightarrow (1+x^2) - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

Untersuchung auf VZW bei f' :

$f'(-2) = -\frac{3}{25}$ und $f'(0) = 1$, d.h. VZW von $-$ nach $+$ \Rightarrow Minimum $f(-1) = -0,5$

$f'(0) = 1$ und $f'(2) = -\frac{3}{25}$ d.h. VZW von $+$ nach $-$ \Rightarrow Maximum $f(1) = 0,5$

Minimum $T(-1/-0,5)$, Maximum $H(1/0,5)$

b. $f(x) = (x-2)^3$ $f'(x) = 3 \cdot (x-2)^2$ $f''(x) = 6 \cdot (x-2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $f''(2) = 0$

Untersuchung auf VZW bei f' : $f'(1) = 3$ und $f'(3) = 3$, d.h. kein VZW

kein Maximum und Minimum

c. $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$; $x > 0$ $f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$

$f''(x) = 2 \ln(x) + 2 + 1 = 2 \ln(x) + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \ln(x) + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot [2 \ln(x) + 1] = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ($\notin D(f)$) $\vee 2 \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-0,5} \approx 0,61$

$f''(e^{-0,5}) = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(e^{-0,5}) \approx -0,184$

Minimum T($e^{-0,5}$ / $\approx -0,184$)

d. $f(x) = e^x - x$ $f'(x) = e^x - 1$ $f''(x) = e^x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(0) = 1$

Minimum T(0/1)

e. $f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{16}}$ $f'(x) = 2e^{-\frac{x^2}{16}} \cdot \left(-\frac{x}{8}\right) = -\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{16}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{16}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{4} \vee e^{-\frac{x^2}{16}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Untersuchung auf VZW bei f' :

$f'(-1) \approx 0,235$ und $f'(1) \approx -0,235$, d.h. VZW von + nach - \Rightarrow Maximum

$f(0) = 2$

Maximum H(0/2)

f. $f(x) = \sqrt{5x+1}$; $x > -\frac{1}{5}$

$f'(x) = 0,5 \cdot 5 \cdot (5x+1)^{-0,5} = \frac{2,5}{\sqrt{5x+1}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2,5}{\sqrt{5x+1}} = 0 \Leftrightarrow 2,5 = 0 \Rightarrow$ keine Lösung

kein Maximum und Minimum

g. $1 - \sin(x)$; $x \in [\pi; 3\pi]$ $f'(x) = -\cos(x)$ $f''(x) = \sin(x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,5\pi \vee x = 2,5\pi$

$f''(1,5\pi) = \sin(1,5\pi) = -1 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(1,5\pi) = 2$

$f''(2,5\pi) = \sin(2,5\pi) = 1 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(2,5\pi) = 0$

Maximum H($1,5\pi/2$), Minimum T($2,5\pi/0$)