Lösungen zu den Übungen zur Orthogonalität von Vektoren

Aufgabe	Rechnung	Lösung
1. Untersuche Sie, ob die Vektoren orthogonal zueinander sind! $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot 6+(-1)\cdot 4+4\cdot(-2)=0$ $\vec{a}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = 2\cdot 3+(-1)\cdot 6+4\cdot 0=0$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} = 6\cdot 3+4\cdot 6+(-2)\cdot 0=32\neq 0$	$\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ sind orthogonal. $\vec{a}$ *und* $\vec{c}$ sind orthogonal. $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$ sind nicht orthogonal.
2. Untersuchen Sie, um welches Viereck es sich handelt! A(2|3|−5), B(5|7|−1), C(12|,17|−7), D(9|13|−11)	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}7\\10\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}7\\10\\-6\end{pmatrix}$ Also gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *und* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$! $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\10\\-6\end{pmatrix} = 21+40-24=37,$ d.h. es gibt keinen rechten Winkel.	Das Viereck ist ein Parallelogramm.
3. Geben Sie einen Vektor an, der auf $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ senkrecht steht! $a.\ \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}$	Gesucht $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ sodass gilt: $\vec{n}\cdot\vec{a} = 0$ *und* $\vec{n}\cdot\vec{b} = 0$ $a.\ \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = 2n_1 - n_2 + 4n_3 = 0$ und $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix} = 6n_1 + 4n_2 - 2n_3 = 0$ I. $2n_1 - n_2 + 4n_3 = 0 \Rightarrow n_2 = 2n_1 + 4n_3$ II. $6n_1 + 4n_2 - 2n_3 = 0$ Einsetzen von I. in II: $6n_1 + 4\cdot(2n_1+4n_3) - 2n_3 = 0 \Leftrightarrow 14n_1 + 14n_3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n_1 = -n_3}$ Einsetzen in I.: $n_2 = 2\cdot(-n_3) + 4n_3 \Leftrightarrow \mathbf{n_2 = 2n_3}$	$\vec{n} = \begin{pmatrix}-n_3\\2n_3\\n_3\end{pmatrix}$ z.B. für $n_3 = 4$: $\begin{pmatrix}-4\\8\\4\end{pmatrix}$ oder für $n_3 = 14$:

$b.\vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$	oder: Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot 6 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 20n_1 - 2n_2 - 4n_3 = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = 8n_1 - 6n_2 + n_3 = 0$ I. $20n_1 - 2n_2 - 4n_3 = 0$ II. $8n_1 - 6n_2 + n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = -8n_1 + 6n_2$ Einsetzen von II. in I: $20n_1 - 2n_2 - 4 \cdot (-8n_1 + 6n_2) = 0$ $52n_1 - 26n_2 = 0$ $n_1 = \frac{26}{52} n_2$ $\mathbf{n_1 = 0{,}5\, n_2}$ Einsetzen in II.: $n_3 = -8 \cdot 0{,}5\, n_2 + 6n_2 = 2n_2$ $\mathbf{n_3 = 2n_2}$ oder: Vektorprodukt: $\begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-6) \\ (-4) \cdot 8 - 20 \cdot 1 \\ 20 \cdot (-6) - (-2) \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -52 \\ -104 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0{,}5n_2 \\ n_2 \\ 2n_2 \end{pmatrix}$ z.B. für $n_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ oder $n_2 = -52$: $\begin{pmatrix} -26 \\ -52 \\ -104 \end{pmatrix}$
4. Gegeben sind die Punkte $A(2\|-1\|2)$, $B(-3\|-2\|2)$ und $C(1\|1\|3)$! a. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist! b. Untersuchen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist. Überlegen Sie dazu zuerst, wo ein rechter Winkel sein könnte!	a. Zu zeigen: $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ (oder $= \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{26}$ [$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{6}$] b. Der rechte Winkel kann nur zwischen den gleichen Seiten liegen: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 = -23 \neq 0$	Das Dreieck ist gleichschenklig. Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.

	$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{4^2+3^2+1^2} = \sqrt{26}$	
5. Untersuchen Sie, ob es sich bei dem Viereck mit A(2|3|−5), B(7|9|−4), C(9|16|−1) und D(4|10|−2) um eine Raute handelt und berechnen Sie den Flächeninhalt!	Zu zeigen: 1. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{DC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ 2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} \neq 0$ (Beweis, dass es kein Quadrat ist) Zu 1: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$ Zu 2: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{DC}\rvert = \sqrt{5^2+6^2+1^2} = \sqrt{62}$ $\lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{2^2+7^2+3^2} = \sqrt{62}$ Zu 3: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 10+42+3 \neq 0$ Flächeninhalt: $A = 0{,}5\cdot e\cdot f = 0{,}5\cdot\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BD}\rvert$ $= 0{,}5\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}7\\13\\4\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\right\rvert = 0{,}5\cdot\sqrt{7^2+13^2+4^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}$ $\approx 0{,}5\cdot 15{,}3\cdot 3{,}74 = 28{,}61$	Das Viereck ist eine Raute. Der Flächeninhalt der Raute beträgt 28,61 FE.
6. Gegeben ist ein Quader mit A(−1|−1|0), B(5|−1|0) und G(5|5|7). Untersuchen Sie, ob die Raumdiagonalen $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{BH}$ senkrecht aufeinander stehen!	H(−1|5|7) $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix}-6\\6\\7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = 6\cdot(-6)+6\cdot6+7\cdot7 = 49 \neq 0$	Die Raumdiagonalen stehen nicht senkrecht aufeinander.