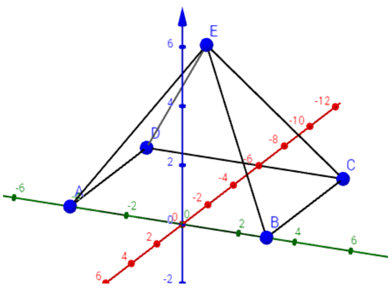
Lösungen zu den Übungen zu Winkeln zwischen Vektoren und Geraden

Aufgabe	Rechnung
1. $a.\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$ $= \frac{2 \cdot 6+4 \cdot 2+4 \cdot 9}{\sqrt{2^2+4^2+4^2} \cdot \sqrt{6^2+2^2+9^2}} = \frac{56}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{56}{66}$ $\Leftrightarrow\ \alpha = \cos^{-1}(\frac{56}{66}) \approx 31{,}95$ Der Winkel beträgt ungefähr $31{,}95^0$.
$b.\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{(-4) \cdot 10+2 \cdot (-10)+(-4) \cdot 5}{\sqrt{(-4)^2+2^2+(-4)^2} \cdot \sqrt{10^2+10^2+5^2}}$ $= \frac{-80}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{225}} = \frac{-80}{90} = -\frac{8}{9}$ $\Leftrightarrow\ \alpha = \cos^{-1}(-\frac{8}{9}) \approx 152{,}73$ Der Winkel beträgt ungefähr $152{,}73^0$.
$c.\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 10+(-8) \cdot (-6)+16 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{2^2+(-8)^2+16^2} \cdot \sqrt{10^2+(-6)^2+(\sqrt{8})^2}}$ $= \frac{113{,}255}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{144}} \approx 0{,}524$ $\Leftrightarrow\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}524) \approx 58{,}39$ Der Winkel beträgt ungefähr $58{,}39^0$.
2. Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks, das durch die Punkte A (7/3/8), B (11/—1/9) und C (3/4/—5) aufgespannt wird!	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\ \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix}\ \ \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\ \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{4^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{33}$ $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{(-8)^2+5^2+(-14)^2} = \sqrt{285}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{(-4)^2+1^2+(-13)^2} = \sqrt{186}$ Winkel bei A: $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{(-4) \cdot 4+(-4) \cdot 1+1 \cdot (-13)}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{186}}$ $= \frac{-33}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{186}} \approx -0{,}42$ $\Leftrightarrow\ \alpha = \cos^{-1}(-0{,}42) \approx 114{,}9$ Winkel bei B: $\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{BA}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BC}\rvert} = \frac{(-4) \cdot (-8)+4 \cdot 5+(-1) \cdot (-14)}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{285}}$ $= \frac{66}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{285}} \approx 0{,}68$ $\Leftrightarrow\ \beta = \cos^{-1}(0{,}68) \approx 47{,}16$ Winkel bei C: $\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\lvert\overrightarrow{CA}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{CB}\rvert} = \frac{4 \cdot 8+(-1) \cdot (-5)+13 \cdot 14}{\sqrt{186} \cdot \sqrt{285}}$ $= \frac{219}{\sqrt{186} \cdot \sqrt{285}} \approx 0{,}95$ $\Leftrightarrow\ \gamma = \cos^{-1}(0{,}95) \approx 18{,}19$ 18,19 + 47,16 + 114,9 = 180,25 ≈ 180, also richtig

3.a. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ $\frac{1\cdot6+0\cdot2+2\cdot2}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+2^2}}$ $= \frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{44}} \approx 0{,}674$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}674) \approx 47{,}62$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $47{,}62^0$.
b. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{(-3)\cdot2+(-2)\cdot3+(-1)\cdot(-6)}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}$ $= \frac{-6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{49}} \approx -0{,}23$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0{,}23) \approx 103{,}3$ $180-103{,}3 = 76{,}7$ (Man muss den kleineren Winkel nehmen! Alternativ kann man mit Betrag rechnen.) Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $76{,}7^0$.
c. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}23\\26\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\-2\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{(-1)\cdot10+3\cdot10+1\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{10^2+10^2+(-2)^2}}$ $= \frac{18}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{204}} \approx 0{,}38$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}38) \approx 67{,}67$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $67{,}67^0$.
d. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\-14\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{2\cdot8+2\cdot6+(-3)\cdot2}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{8^2+6^2+2^2}}$ $= \frac{22}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{104}} \approx 0{,}52$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}52) \approx 58{,}67$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $58{,}67^0$.
4. Die Punkte A(0/−4/0), B(0/3/0), C(−6/3/0), D(−6/−4/0) und E(−3/−0,5/5) legen eine Pyramide fest. Berechnen Sie den Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{EA}$ und $\overrightarrow{EB}$ sowie den Winkel β zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{AB}$. 	$\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix}3\\-3{,}5\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix}3\\3{,}5\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}-3\\3{,}5\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$ $\lvert\overrightarrow{EA}\rvert = \sqrt{3^2+(-3{,}5)^2+(-5)^2} = \sqrt{46{,}25}$ $\lvert\overrightarrow{EB}\rvert = \sqrt{3^2+3{,}5^2+(-5)^2} = \sqrt{118{,}25}$ $\lvert\overrightarrow{AE}\rvert = \sqrt{(-3)^2+3{,}5^2+5^2} = \sqrt{46{,}25}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{7^2} = 7$ $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}}{\lvert\overrightarrow{EA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{EB}\rvert} = \frac{3\cdot3+(-3{,}5)\cdot3{,}5+(-5)\cdot(-5)}{\sqrt{46{,}25}\cdot\sqrt{118{,}25}} = \frac{21{,}75}{\sqrt{46{,}25}\cdot\sqrt{118{,}25}} \approx 0{,}29$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}29) \approx 73{,}14$ $\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{AE}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AB}\rvert} = \frac{3{,}5\cdot7}{\sqrt{46{,}25}\cdot7} = \frac{24{,}5}{\sqrt{46{,}25}\cdot7} \approx 0{,}51$ $\Leftrightarrow \beta = \cos^{-1}(0{,}51) \approx 59{,}34$