Lösung zu den Übungen zur mittleren Änderungsrate

1. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion f im angegebenen Intervall I.
   a. $f(x) = x^3-3x$ I = [1;4]
   b. $f(x) = 2x^2-6$ I = [2;3]
   c. $f(x) = -3x-2$ I = [−2;5]
   d. $f(x) = 2x^5 + 3x^2$ I = [−1;2]
   e. $f(x) = -3x^3-2x$ I = [0;6]
   f. $f(x) = x^4 + 2x^2$ I = [−3;3]

a. $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{52-(-2)}{3} = \frac{54}{3} = 18$

b. $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{12-2}{1} = 10$

c. $\frac{f(5)-f(-2)}{5-(-2)} = \frac{-17-4}{7} = \frac{-21}{7} = -3$

d. $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{76-1}{3} = \frac{75}{3} = 25$

e. $\frac{f(6)-f(0)}{6-0} = \frac{-660-0}{6} = -110$

f. $\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)} = \frac{99-99}{6} = 0$

2. Bestimmen Sie eine reelle Zahl a so an, dass
   a. die Funktion $f(x) = ax^3-2x$ im Intervall [−2; 4] die mittlere Änderungsrate $\frac{2}{3}$ besitzt.
   b. die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall [−1; a], a > 0, die mittlere Änderungsrate 9,5 besitzt.

a. $\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{64a-8-(-8a)+4)}{6} = \frac{2}{3}$
$\Leftrightarrow \frac{72a-12}{6} = \frac{2}{3} /\cdot 6 \Leftrightarrow 72a-12 = 4$
$\Leftrightarrow 72a = 16 \Leftrightarrow a = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$

b. $\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)} = 9{,}5 \Leftrightarrow \frac{a^2+1-2}{a+1} = 9{,}5$
$\Leftrightarrow \frac{a^2-1}{a+1} = 9{,}5 \Leftrightarrow \frac{(a-1)\cdot(a+1)}{a+1} = 9{,}5$
$\Leftrightarrow a-1 = 9{,}5 \Leftrightarrow a = 10{,}5$

3. Die Funktion $f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}4x + 12$ modelliert die Temperaturen an einem Tag in einer Stadt, x in Stunden, f(x) in Grad Celsius. Berechnen Sie die durchschnittliche Änderungsrate in den Intervallen I [2;6], I [8;18] und I [18;24]. Beschreiben Sie, was dies im Sachzusammenhang bedeutet.

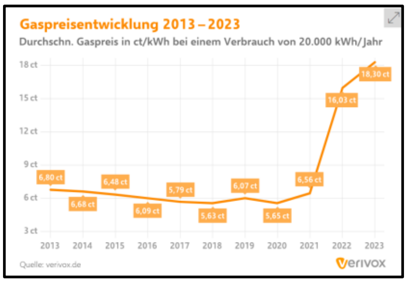
$\frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{19{,}44-13{,}52}{4} = 1{,}48$

$\frac{f(18)-f(8)}{18-8} = \frac{25{,}68-22{,}88}{10} = 0{,}28$

$\frac{f(24)-f(18)}{24-18} = \frac{-1{,}44-25{,}68}{6} = -4{,}52$

Zwischen 2 und 6 Uhr nachts steigt die Temperatur durchschnittlich um 1,48 Grad pro Stunde und zwischen 8 und 18 Uhr durchschnittlich um 0,28 Grad; zwischen 18 und 24 Uhr fällt sie durchschnittlich um 4,52 Grad pro Stunde.

4. Berechnen Sie die durchschnittliche Änderungsrate in den folgenden Jahren und beschreiben Sie, was dies im Sachzusammenhang bedeutet.
   a. von 2013 bis 2023
   b. von 2013 bis 2020
   c. von 2021 bis 2023
   d. von 2017 bis 2020



a. $\frac{f(4)-f(1)}{2023-2013} = \frac{18{,}30-6{,}80}{10} = \frac{11{,}5}{10} = 1{,}15$
Die Gaspreise steigen von 2013 bis 2023 durchschnittlich um 1,15ct/kWh pro Jahr.

b. $\frac{f(4)-f(1)}{2020-2013} = \frac{5{,}65-6{,}80}{7} = \frac{-1{,}15}{7} \approx -0{,}16$
Die Gaspreise fallen von 2013 bis 2023 durchschnittlich um 0,16ct/kWh pro Jahr.

c. $\frac{f(2023)-f(2021)}{2023-2021} = \frac{18{,}30-6{,}56}{2} = \frac{11{,}74}{2} = 5{,}87$
Die Gaspreise steigen von 2013 bis 2023 durchschnittlich um 5,87ct/kWh pro Jahr.

d. $\frac{f(4)-f(1)}{2020-2017} = \frac{5{,}65-5{,}79}{3} = \frac{-0{,}14}{3} = -0{,}04\overline{6}$
Die Gaspreise fallen von 2013 bis 2023 durchschnittlich um 0,05ct/kWh pro Jahr.