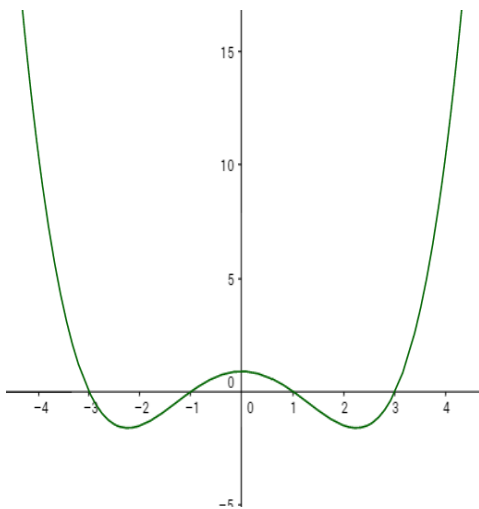


# Lösungen zur Übungsklausur zur Differentialrechnung von ganzrationalen Funktionen

1. Berechnen Sie die Nullstellen (ohne TR), Extrema, Wendepunkte und das Krümmungsverhalten der Funktionen! Runden Sie alle Ergebnisse auf 2 Stellen hinter dem Komma!

a)  $f(x) = 0,1x^4 - x^2 + 0,9$ !



**Nullstellen:**

$$f(x) = 0,1x^4 - x^2 + 0,9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_{1/2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 9} = 5 \pm 4$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 9 \vee z_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = -1$$

**Extrema:**

$$f'(x) = 0,4x^3 - 2x \quad f''(x) = 1,2x^2 - 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,4x^3 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 0,4x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(0) = 0,9$$

$$f''(\sqrt{5}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \quad f(\sqrt{5}) = -1,6$$

$$f''(-\sqrt{5}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \quad f(-\sqrt{5}) = -1,6$$

$$\text{HP } (0/0,9) \quad \text{TP } (\sqrt{5}/-1,6) \quad \text{TP } (-\sqrt{5}/-1,6)$$

**Wendepunkte:**

$$f''(x) = 1,2x^2 - 2 \quad f'''(x) = 2,4x$$

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1,2x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{1,2} = 1,6$$

$$\Leftrightarrow x \approx 1,29 \vee x \approx -1,29$$

$$f'''(1,29) = 3,096 \quad f(1,29) \approx -0,487$$

$$f'''(-1,29) = -3,096 \quad f(-1,29) \approx -0,487$$

$$W_1(1,29/-0,487) \quad W_2(-1,29/-0,487)$$

**Krümmungsverhalten:**

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1,29 \vee x \approx -1,29$$

$$x < -1,29 : \text{z.B. } x = -2: f''(-2) = 2,8 > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt}$$

$$x \in [-1,29, 1,29]: \text{z.B. } x = 0: f''(0) = -2 > 0 \Rightarrow$$

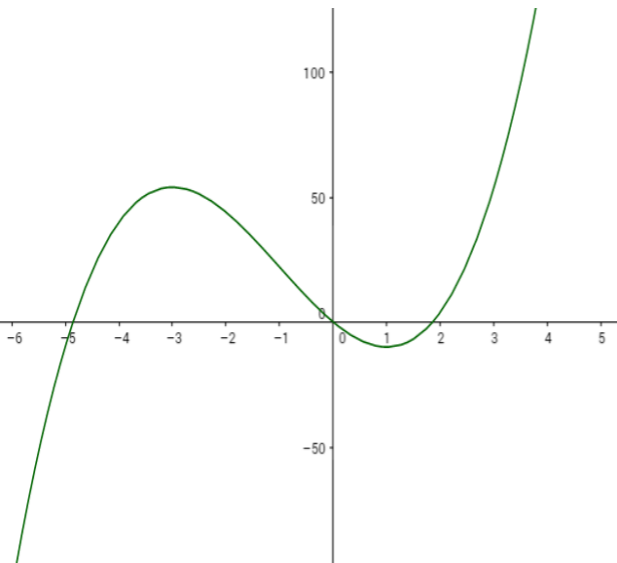
rechtsgekrümmt

$$x > 1,29 : \text{z.B. } x = 2: f''(2) = 2,8 > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt}$$

$$x < -1,29 \text{ und } x > 1,29 \text{ linksgekrümmt}$$

$$x \in [-1,29, 1,29] \text{ rechtsgekrümmt}$$

1. b)  $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x$



**Nullstellen:**

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (2x^2 + 6x - 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 3x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1/2} = -1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 9} = -1,5 \pm \sqrt{11,25}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x \approx -4,85 \vee x \approx 1,85$$

**Extrema:**

$$f'(x) = 6x^2 + 12x - 18$$

$$f''(x) = 12x + 12$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$f''(-3) = -24 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(-3) = 92$$

$$f''(1) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \quad f(1) = -10$$

**HP (-3/92)      TP (1/-10)**

**Wendepunkte:**

$$f''(x) = 12x + 12$$

$$f'''(x) = 12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'''(-1) = 12 \quad f(-1) = 22$$

**WP (-1/22)**

**Krümmungsverhalten:**

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$x < -1$  : z.B.  $x = -2$ :  $f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow$  rechtsgekrümmt

$x > -1$  : z.B.  $x = 0$ :  $f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow$  linksgekrümmt

**$x < -1$  rechtsgekrümmt**

**$x > -1$  linksgekrümmt**

2.a. Berechnen Sie die Tangente  $t$  des Graphen der Funktion  $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$  im Berührungspunkt  $P(1/7)$ !

b. In welchem Punkt hat die Tangente an den Graphen von  $f(x) = 2x^2$  die Steigung 16?

a.  $t(x) = mx + b$

$$f'(x) = 6x + 6$$

$$m = f'(1) = 12$$

$$\Leftrightarrow t(x) = 12x + b$$

$P(1/7)$  einsetzen:

$$7 = 12 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -5$$

**$t(x) = 12x - 5$**

b.  $f'(x) = 4x$

$$m = 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$$

**Für  $x = 4$  hat die Tangente die Steigung 16.**

3. In den nächsten 13 Monaten wird der Absatz von Fahrrädern modelliert durch die Funktion  $f(x) = 1,5x^3 - 27x^2 + 121,5x + 450$ , mit  $0 \leq x \leq 13$ ,  $x$  in Monaten,  $f(x)$  in verkauften Fahrrädern.
- Wie viele Fahrräder werden zu Beginn des 3. Monats verkauft?
  - Berechnen Sie, wann die meisten Fahrräder verkauft werden!
  - Berechnen Sie den Wendepunkt und interpretieren Sie ihn im Gesamtzusammenhang!
  - Berechnen Sie, wann 516 Fahrräder verkauft werden!

a.  $f(3) = 612$

**Zu Beginn des 3. Monats werden 612 Fahrräder verkauft.**

b.  $f'(x) = 4,5x^2 - 54x + 121,5$

$f''(x) = 9x - 54$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4,5x^2 - 54x + 121,5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 9$

$f''(3) = -27 < 0 \Rightarrow$  Maximum  $f(3) = 612$

$f''(9) = 27 > 0 \Rightarrow$  Minimum  $f(9) = 450$

Untersuchung der Ränder:  $f(0) = 450$ ,  $f(13) = 762 > 612$

**Nach 13 Monaten werden die meisten Fahrräder verkauft.**

**c. Wendepunkte:**

$f''(x) = 9x - 54$        $f'''(x) = 9$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 9x - 54 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

$f'''(6) = 9 > 0 \Rightarrow$  minimale Steigung

$f'(6) = -40,5$

**Nach 6 Monaten sinkt der Verkauf von Fahrrädern innerhalb des gegebenen Zeitraums am meisten.**

d.  $1,5x^3 - 27x^2 + 121,5x + 450 = 516$

$\Leftrightarrow 1,5x^3 - 27x^2 + 121,5x - 66 = 0$

$\Leftrightarrow x \approx 0,63 \vee x \approx 6,37 \vee x = 11$

**Nach ca. 0,63 und 6,73 und 11 Monaten werden 516 Fahrräder verkauft.**