Lösungen zur Übungsklausur zur Differentialrechnung I

Aufgabe	Rechenweg
1. Berechnen Sie die Ableitung an der Stelle x_0 mit Hilfe des Differenzenquotienten! a. $f(x) = 2x^2$ $\quad x_0 = 3$	$a.\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{2(x_0+h)^2-2(x_0)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cdot(3+h)^2-2\cdot(3)^2}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cdot(3)^2+2\cdot 3h+2h^2-2\cdot(3)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{6h+2h^2}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}(6+2h) = 6$
b. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x_0 = -1$	$b. \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-1+h}-\frac{1}{-1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-1+h}+1}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-1+h}+\frac{-1+h}{-1+h}}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h}{-1+h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot(-1+h)} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{(-1+h)} = -1$
2. Berechnen Sie die Tangente an f(x) im Punkt P_0! a. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$ $\quad P_0 = (3/?)$	a. $f(3) = 112$ und $f'(x) = 9x^2 + 8x$, d.h. $f'(3) = 105$ $y = 105x + b$ $112 = 105 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -203$ $y = 105x - 203$
b. $f(x) = x^4 - 6x^5$ $\quad P_0 = (-2/?)$	b. $f(-2) = 208$ und $f'(x) = 4x^3 - 30x^4$, d.h. $f'(-2) = -512$ $y = -512x + b$ $208 = -512 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 1232$ $y = 105x + 1232$
3. Leiten Sie zweimal ab! a. $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$	a. $f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ $\qquad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$
$b. f(x) = 2x^{-2} + 4x^{-6}$	b. $f'(x) = -4x^{-3} - 24x^{-7}$ $\qquad f''(x) = 12x^{-4} + 148x^{-8}$
$c. f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{7}{8}}$	c. $f'(x) = \frac{2}{3}\cdot 3x^{\frac{2}{3}-1} - \frac{7}{8}\cdot x^{\frac{7}{8}-1} = 2\cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{7}{8}\cdot x^{-\frac{1}{8}}$ $f''(x) = -\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{4}{3}} + \frac{7}{64}\cdot x^{-\frac{9}{8}}$
$d. f(x) = \sqrt[3]{x} - 9\sqrt[4]{x^3}$	d. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 9\cdot x^{\frac{3}{4}}$ $f'(x) = \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{27}{4}\cdot x^{-\frac{1}{4}}$ $\qquad f''(x) = -\frac{2}{9}\cdot x^{-\frac{5}{3}} + \frac{27}{16}\cdot x^{-\frac{5}{4}}$
$e. f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$	e. $f(x) = x^{-2}$ $\qquad f'(x) = -2\cdot x^{-3}$ $\qquad f''(x) = 6\cdot x^{-4}$
$f. f(x) = ax^3 - bx^2 + cx + d$	f. $f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$ $\qquad f''(x) = 6ax - 2b$
$g. f(u) = 4u^3 + 3u + x^3$	g. $f'(u) = 12u^2 + 3$ $\qquad f''(u) = 24u$
$h. f(z) = 3x + 4z^3 - \sqrt{x}$	h. $f'(z) = 12z^2$ $\qquad f''(z) = 24z$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4x$. a. Bestimmen Sie die Steigung der Kurve in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen! b. Wo hat der Graph die Steigung 6? c. Wo hat der Graph eine waagerechte Tangente? d. Welche Tangente an f(x) steht senkrecht zu $y = \frac{1}{8}x + 3$?	a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$ $f(0) = 0$ $f'(x) = 2x - 4 \quad f'(0) = -4 \quad f'(4) = 4$ mit der x-Achse: bei 0: $f'(0) = -4$ und bei 4 : $f'(4) = 4$ mit der y-Achse: bei 0: $f'(0) = -4$ b. $f'(x) = 6 \Leftrightarrow 2x - 4 = 6 \Leftrightarrow x = 5$ Der Graph hat bei 5 die Steigung 6. c. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Der Graph hat bei 2 eine waagerechte Tangente. d. zu zeigen: $f'(x) = -8$ (denn das Produkt der Steigung zweier senkrechter Geraden ist -1) $f'(x) = -8 \Leftrightarrow 2x - 4 = -8 \Leftrightarrow x = -2 \quad f(-2) = 12$ $t(x) = -8x + b \Leftrightarrow 12 = -8 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = -4$ $t(x) = -8x - 4$
5. Leiten Sie mit Hilfe der Produktregel ab! a. $f(x) = (4x^2 + 12x + 9) \cdot (2x + 3)$ b. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos(x)$ c. $f(x) = \ln(x) \cdot (x^2 + 2)$ d. $f(u) = (u^7 - 3) \cdot (u^3 - 4u^{-2})$	a. $f'(x) = (8x + 12) \cdot (2x + 3) + (4x^2 + 12x + 9) \cdot 2$ $= 16x^2 + 24x + 24x + 36 + 8x^2 + 24x + 18$ $= 24x^2 + 72x + 54$ b. $f'(x) = 2x \cdot \cos(x) + (x^2 + 1) \cdot (-\sin(x))$ $= 2x \cdot \cos(x) - (x^2 + 1) \cdot \sin(x)$ c. $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 2) + \ln(x) \cdot 2x$ d. $f'(u) = 7u^6 \cdot (u^3 - 4u^{-2}) + (u^7 - 3) \cdot (3u^2 + 8u^{-3})$ $= 7u^9 - 28u^4 + 3u^9 + 8u^4 - 9u^2 - 24u^{-3}$
6. Leiten Sie mit der Kettenregel ab! a. $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x)^4$ b. $f(x) = \sqrt{4x^3 + 5x}$ c. $f(x) = 2 \cdot e^{-3x+9}$ d. $f(x) = 6 \cdot e^{\sqrt{x+1}}$	a. $f'(x) = 4 \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x)^3 \cdot (3x^2 - 8x)$ $= (12x^2 - 32x) \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x)^3$ b. $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (12x^2 + 5)$ $= (6x^2 + 2{,}5) \cdot (4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}}$ c. $f'(x) = 2 \cdot (-3) \cdot e^{-3x+9} = -6 \cdot e^{-3x+9}$ d. $f'(x) = 6 \cdot e^{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x+1}}$
7.a. Wo haben die Funktionen $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$ und $g(x) = 2x^3 + 9$ die gleiche Steigung? b. Berechnen Sie, wo der Graph von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ fällt!	a. $f'(x) = -6x + 12 \quad g'(x) = 6x^2$ $-6x + 12 = 6x^2 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$ Die Funktionen haben für $x = -2$ und $x = 1$ die gleiche Steigung. b. gesucht: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 0$ Zuerst muss man die Nullstellen berechnen: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Nun muss man untersuchen, ob $f'(x) < 0$ oder > 0 ist: $x < 2$, z.B. $x = 0$: $f'(0) = 4 > 0$, d.h. $f'(x) > 0$ für $x < 2$ $x > 2$, z.B. $x = 4$: $f'(4) = -8 < 0$ d.h. $f'(x) < 0$ für $x > 2$ Der Graph fällt für alle $x > 2$.