
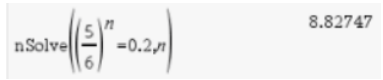


Lösungen zu den Übungen zu Binomialverteilungen 2: Berechnung der Länge n

Aufgabe	Lösung
<p>1. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,6$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Anzahl n der Bernoulli-Experimente!</p> <p>a. $P(X=0) \leq 0,2$</p> <p>b. $P(X=n) \leq 0,01$</p>	<p>a. $B_{n,0,6}(0) \leq 0,2 \Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^n \leq 0,2 \Leftrightarrow 0,4^n \leq 0,2$ $\Leftrightarrow \ln(0,4^n) \leq \ln(0,2)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,4) \leq \ln(0,2)$ $\Leftrightarrow n \geq * \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,4)} \approx 1,75$ *da $\ln(0,4) < 0$</p> <p>n muss mindestens 2 sein.</p> <p>b. $P_{n,0,6}(X=n) \leq 0,01 \Leftrightarrow \binom{n}{n} \cdot 0,6^n \cdot 0,4^0 \leq 0,01$ $\Leftrightarrow 0,6^n \leq 0,01$ $\Leftrightarrow \ln(0,6^n) \leq \ln(0,01)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,6) \leq \ln(0,01)$ $\Leftrightarrow n \geq * \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,01$ *da $\ln(0,6) < 0$</p> <p>n muss mindestens 10 sein.</p>
<p>2. Die 17- bis 25jährigen sind durchschnittlichen 3 Stunden mit ihrem Handy beschäftigt, das sind bei einem Schlafkonsum von 8 Stunden etwa 18,75% ihrer wachen Zeit.</p> <p>a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man tagsüber unter 12 Jugendlichen mindestens 8 findet, die sich gerade mit ihrem Handy beschäftigen?</p> <p>b. Wie viele junge Erwachsene muss man mindestens untersuchen, um mit einer 90%igen Wahrscheinlichkeit mindestens einen zu finden, der sein Handy <u>eingeschaltet</u> hat?</p>	<p>a. $F_{12,0,8125}(8 \leq X \leq 12) \approx 0,000366$ Die Wahrscheinlichkeit mindestens 8 Jugendliche mit Handys anzutreffen liegt bei 0,036%.</p> <p>b. $p = 1 - p(\text{keiner hat sein Handy eingeschaltet}) = 1 - B_{n,0,1875}(0)$ $1 - B_{n,0,1875}(0) = 0,9 \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,1875^0 \cdot 0,8125^n = 0,9$ $\Leftrightarrow 1 - 0,8125^n = 0,9 \Leftrightarrow 0,8125^n = 0,1^* \Leftrightarrow \ln(0,8125^n) = \ln(0,1)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,8125) = \ln(0,1) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8125)} \Leftrightarrow n = 11,089$</p> <p>Man muss ungefähr 11 Personen untersuchen.</p> <p style="text-align: right;">mit TR*: <code>nSolve((0.8125)^n = 0.1, n)</code> 11.0893</p>
<p>3. Bei den 12 bis 17jährigen fällt die Raucherquote ständig. Im Jahr 2014 haben 10% dieser Jugendlichen angegeben, zu rauchen.</p> <p>a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man unter 20 Jugendlichen mindestens 18 findet, die nicht rauchen?</p>	<p>a. $F_{20,0,9}(18 \leq X \leq 20) \approx 0,6769$ Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 18 Nichtraucher zu finden, liegt bei 67,69%.</p> <p>b. $1 - B_{n,0,1}(0) > 0,8 \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n > 0,8$ $\Leftrightarrow 1 - 0,9^n > 0,8 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,2 \Leftrightarrow \ln(0,9^n) < \ln(0,2)$</p>

<p>b. Wie viele junge Erwachsene muss man untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens einen zu finden, der raucht?</p>	<p>$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,9) < \ln(0,2) \Leftrightarrow n > * \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)} \Leftrightarrow n > 15,27$ *da $\ln(0,9) < 0$ ist</p> <p>Man muss mindestens 16 Personen untersuchen.</p>
<p>4. Bei einem Würfelspiel kommt es vor allen Dingen auf die Anzahl der Sechsen an.</p> <p>a. Wie oft muss man würfeln, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% mindestens eine Sechse würfelt?</p> <p>b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man bei 10 Würfeln höchstens 4 Sechsen?</p> <p>c. Bei Mensch-Ärgere-Dich-Nicht hat man in jeder Runde drei Versuche, um eine 6 zu würfeln und seine Spielfigur aus dem Haus zu ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt die Figur 2 Runden im Häuschen?</p>	<p>a. $1 - B_{n; \frac{1}{6}}(0) = 0,8 \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0,8$ $\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0,8 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0,2$   $\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = \ln(0,2)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) = \ln(0,2) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \Leftrightarrow n = 8,827$</p> <p>Man muss ungefähr 9mal würfeln.</p> <p>b. $F_{10; \frac{1}{6}}(4) \approx 0,9845$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,45 % wirft man höchstens 4 Sechsen.</p> <p>c. $B_{6; \frac{1}{6}}(0) \approx 0,3349$ Die Wahrscheinlichkeit, 2 Runden im Häuschen zu bleiben, liegt bei 33,49%.</p>
<p>5. In einem Betrieb sind 80% der Mitarbeiter zufrieden mit den Arbeitsbedingungen.</p> <p>a. Wie viele Mitarbeiter müssen mindestens befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einer unzufrieden ist?</p> <p>b. Wie viele Mitarbeiter müssen mindestens befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens zwei unzufrieden sind?</p>	<p>a. $X = \text{Anzahl der unzufriedenen Mitarbeiter } p = 0,2$ $1 - P(X = 0) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^n \geq 0,95$ $\Leftrightarrow 1 - 0,8^n \geq 0,95 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,05 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,05)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0,8) \leq \ln(0,05) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,8)} \Leftrightarrow n \geq 13,43$</p> <p>Man muss mindestens 14 Mitarbeiter befragen.</p> <p>b. $1 - P(X = 0) - P(X = 1) \geq 0,95$ $\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^n - \binom{n}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{n-1} \geq 0,95$ $\Leftrightarrow 0,8^n - n \cdot 0,2 \cdot 0,8^{n-1} \leq 0,05$ $\Leftrightarrow n \geq 21,78$</p> <p>Man muss mindestens 22 Mitarbeiter fragen.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin-top: 10px;"> <p>Man rechnet mit dem TR die Ungleichung als Gleichung aus:</p> $\text{nSolve}\left((0,8)^n + n \cdot 0,2 \cdot (0,8)^{n-1} = 0,05, n, 0\right)$ <p style="text-align: right;">21.774</p> </div>