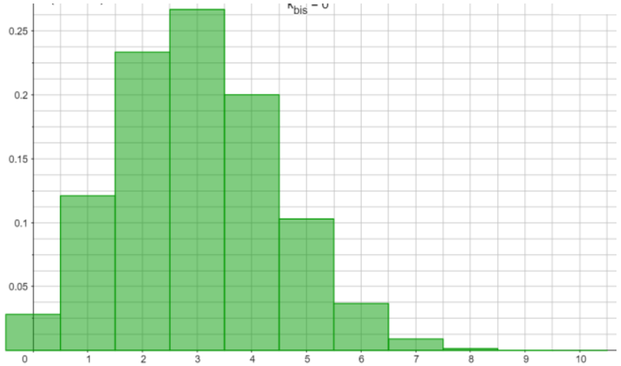
Lösung zu den Übungen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung bei Binomialverteilungen

1. Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n = 15 und p = 0,2. a. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung! b. Begründen Sie, welche der Histogramme die Zufallsgröße X beschreibt!	a. $\mu = 15 \cdot 0{,}2 = 3$ $\sigma = \sqrt{15 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} \approx 1{,}55$ b. Figur 2, da die größte Wahrscheinlichkeit beim Erwartungswert, d.h. bei 3, liegen muss.
2. In NRW liegt der Anteil der positiven Coronatests am 28.10.2020 bei 6,6%. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der positiven Tests an. a. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Test von 100 Personen genau 10 Tests positiv sind. b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Test von 100 Personen höchstens 8 Tests positiv sind. c. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung! d. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der positiven Tests um mehr als 15% vom Erwartungswert abweicht! e. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der positiven Tests höchstens um eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht!	a. $B_{100;0,066}(10) \approx 0{,}0582$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt ungefähr 5,82%. b. n = 100 p = 0,066 $P(0 \leq X \leq 8) \approx 0{,}7855$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt 78,55%. c. $\mu = 100 \cdot 0{,}066 = 6{,}6$ $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}066 \cdot 0{,}934} \approx 2{,}48$ d. $6{,}6 \cdot 0{,}15 = 0{,}99$ $6{,}6 - 0{,}99 = 5{,}61$ und $6{,}6 + 0{,}99 = 7{,}59$ $P(6 \leq X \leq 7) \approx 0{,}3133$ $1 - 0{,}3133 = 0{,}6867$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,67% weicht die Anzahl der positiven Tests um 15% ab. e. $6{,}6 - 2{,}48 = 4{,}12$ und $6{,}6 + 2{,}48 = 9.08$ $P(5 \leq X \leq 9) \approx 0{,}6728$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 67,28% weicht die Anzahl der positiven Tests um höchstens eine Standardabweichung ab.

<table>
<tr>
<td>3. Bestimmen Sie für die Binomialverteilungen die Parameter n und p und machen Sie anschließend für zwei Werte die Probe.

</td>
<td>n = 10 und $\mu = 3$ => p = $\frac{\mu}{n} = \frac{3}{10}$ = 0,3
Probe: $B_{10;0,3}(1) \approx 0{,}121$ ☺
$B_{10;0,3}(5) \approx 0{,}103$</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße X. Berechnen Sie mithilfe einer Termumformung, dass gilt:
μ = 2p und $\sigma = \sqrt{2 \cdot p \cdot q}$
<table>
<tr><td>r</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>P(X = r)</td><td>q^2</td><td>2pq</td><td>p^2</td></tr>
</table></td>
<td>p + q = 1
$\mu = 0 \cdot q^2 + 1 \cdot 2pq + 2 \cdot p^2 = 2pq + 2p^2 = 2p \cdot (1-p) + 2p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p$

$\sigma = \sqrt{(2p-0)^2 \cdot q^2 + (2p-1)^2 \cdot 2pq + (2p-2)^2 \cdot p^2}$

$= \sqrt{(2p-0)^2 \cdot (1-p)^2 + (2p-1)^2 \cdot 2p \cdot (1-p) + (2p-2)^2 \cdot p^2}$

$= \sqrt{4p^2 \cdot (1-2p+p^2) + (4p^2-4p+1) \cdot (2p-2p^2) + (4p^2-8p+4) \cdot p^2}$

$= \sqrt{\cancel{4p^2} - \cancel{8p^3} + \cancel{4p^4} + \cancel{8p^3} - \cancel{8p^2} + 2p - \cancel{8p^4} + \cancel{8p^3} - 2p^2 + \cancel{4p^4} - \cancel{8p^3} + \cancel{4p^2}}$
$= \sqrt{2p - 2p^2} = \sqrt{2 \cdot (p - p^2)} = \sqrt{2 \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2 \cdot p \cdot q}$</td>
</tr>
</table>