

Lösungen zu Textaufgaben zu Ebenen und Geraden

1. Eine Lichtquelle sendet vom Standpunkt S (0/0/4) Lichtstrahlen aus. Berechnen Sie die Koordinaten des Schattens des Punktes P(2/3/2)!

$$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Geraden durch S und P lautet: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *

Die Gleichung der x_1, x_2 -Ebene lautet:

$$E: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man berechnet nun den Durchstoßpunkt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r = s \\ 3r = t \\ 4 - 2r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 = s \\ 3 \cdot 2 = t \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 4 \\ t = 6 \\ r = 2 \end{cases}$$

Man setzt r in g ein (oder s und t in E):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ g durchstößt E in D (4/6/0)}$$

* Alternativ: Boden: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 2$; danach setzt man r in g ein.

Der Schattenpunkt hat die Koordinaten (4/6/0)

2. Eine Lampe sendet vom Punkt S (8/6/0) Lichtstrahlen auf die Spitze der Pyramide aus. Untersuchen Sie, ob der Schattenpunkt des Punktes P (4/3/2) auf eine Leinwand fällt, die entlang der x_2, x_3 -Ebene aufgespannt wird und 10m hoch und 20m breit ist!

$$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Geraden durch S und P lautet: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

x_2, x_3 -Ebene heißt $x_1 = 0$

$$x_1 = 0 \Leftrightarrow 8 + 4r = 0 \Leftrightarrow r = -2$$

Man setzt r in g ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

g durchstößt E in D(0/0/4), da $4 < 10$ ist, liegt D auf der Leinwand.

Der Schattenpunkt liegt auf der Leinwand bei S (0/0/4).

3. Ein Flugzeug landet am alten Flughafen in Hong Kong. Zur Zeit $t = 0$ ist es im Punkt P (5000/-3000/600). Man simuliert die Flugbahn durch eine Gerade g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}, r > 0 \text{ in Sekunden, alle Angaben in Metern.}$$

a. Wann und an welchem Punkt setzt das Flugzeug zuerst auf dem Boden auf, wenn es seine Flugbahn nicht ändern würde?

Man berechnet den Durchstoßpunkt der Geraden mit der x_1, x_2 -Ebene:

$$x_3 = 0 \Leftrightarrow 600 - 30r = 0 \Leftrightarrow r = 20$$

Man setzt $r = 20$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + 20 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6200 \\ -1800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug landet in 20 Sekunden im Punkt (6200/-1800/0).

b. 15 Sekunden nach dem Beginn der Flugroutenmessung muss das Flugzeug ein 200 m hohes Hochhaus überfliegen. Berechnen Sie, ob der Pilot seine Flugroute ändern muss!

Man setzt $r = 15$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10900 \\ -2100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Da das Flugzeug eine Höhe von 150 Metern hat, muss es seine Route ändern.

4. Die Dachspitze eines Hauses hat die Koordinaten B (4/8/12). Nachts wird das Haus von dem Scheinwerfer eines Leuchtturms angestrahlt, dessen Zentrum in L (-20/-10/48) liegt. Alle Angaben in m.

a. Bestimmen Sie den Schattenpunkt der Dachspitze!

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 48 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 4 + 24r = x_1 \\ 8 + 18r = x_2 \\ 12 - 36r = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 4 + 24 \cdot \frac{1}{3} = x_1 \\ 8 + 18 \cdot \frac{1}{3} = x_2 \\ r = \frac{1}{3} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 12 \\ x_2 = 14 \\ r = \frac{1}{3} \end{array}$$

Der gesuchte Schattenpunkt ist S (12/14/0).

b. Die Gemeinde möchte im Punkt P(8/11/h) einen Fahnenmast aufstellen, dessen Spitze von dem Leuchtturm angestrahlt werden soll! Berechnen Sie, wie hoch der Fahnenmast sein muss!

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 8 = 4 + 24r \\ 11 = 8 + 18r \\ h = 12 - 36r \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} r = \frac{1}{6} \\ r = \frac{1}{6} \\ h = 12 - 36 \cdot \frac{1}{6} \end{array} \Leftrightarrow h = 6$$

Der Fahnenmast muss 6m hoch sein.