

## Lösung zu den zusammenfassenden Übungen zu Binomialverteilungen: fehlerhafte Masken

Aufgabe	Lösung
a. Mit wie vielen fehlerhaften Masken muss man pro Tag rechnen?	<p><math>X</math> = Anzahl der fehlerhaften Masken, binomialverteilt  <math>50.000 \cdot 0,08 = 4.000</math>                      Man muss mit 4000 fehlerhaften Masken pro Tag rechnen.</p>
b. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass pro Tag i. höchstens 4200 fehlerhaft sind. ii. genau 4000 fehlerhaft sind. iii. zwischen 2000 und 4000 Masken fehlerhaft sind.	<p><math>n = 50.000</math> <math>p = 0,08</math>                      i. <math>P(X \leq 4200) \approx 0,9995</math> also 99,95%                      ii. <math>P(X = 4000) \approx 0,0065</math> also 0,65%                      iii. <math>P(2000 \leq X \leq 4000) \approx 0,5042</math> also 50,42%</p>
c. Berechnen Sie, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Anzahl der fehlerhaften Masken um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht?	<p><math>\mu = 4.000</math> <math>\sigma = \sqrt{50.000 \cdot 0,08 \cdot 0,92} \approx 60,66</math>  <math>\mu - \sigma = 3.939,34</math> <math>\mu + \sigma = 4.060,66</math>  <math>P(3940 \leq X \leq 4060) \approx 0,6814</math>                      Die Wahrscheinlichkeit beträgt 68,14%.</p>
d. Wie viele Masken muss man mindestens untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 96 Prozent mindestens eine fehlerhafte Maske zu finden?	<p><math>1 - P(X = 0) \geq 0,96</math>  <math>1 - 0,92^n \geq 0,96</math>  <math>0,04 \geq 0,92^n</math>  <math>\ln(0,04) \geq \ln(0,92^n)</math>  <math>\ln(0,04) \geq n \cdot \ln(0,92)</math>  <math>n \geq \frac{\ln(0,04)}{\ln(0,92)} \approx 38,6</math>                      Man muss mindestens 39 Masken untersuchen.</p>
e. Wie viele Masken muss man mindestens untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 96 Prozent mindestens zwei fehlerhafte Masken zu finden?	<p><math>1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \geq 0,96</math>  <math>1 - 0,92^n - \binom{n}{1} \cdot 0,08 \cdot 0,92^{n-1} \geq 0,96</math>  <math>1 - 0,92^n - n \cdot 0,08 \cdot 0,92^{n-1} \geq 0,96</math>  <math>0,04 \geq 0,92^n + n \cdot 0,08 \cdot 0,92^{n-1}</math>  <math>n \geq 60,62</math>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> <math>\text{nSolve}(0,04 = (0,92)^n + n \cdot 0,08 \cdot (0,92)^{n-1}, n, 0)</math>  <span style="float: right;">60.6238</span> </div>                     Man muss mindestens 61 Masken untersuchen.</p>
f. Ein potentieller Käufer misstraut den Angaben des Herstellers und befürchtet, dass mehr als 8% der Masken fehlerhaft sind. Er erhält daher	<p><math>n = 500</math> <math>p = 0,08</math>  <math>\mu = 40</math>  <math>\sigma = \sqrt{500 \cdot 0,08 \cdot 0,92} \approx 6,07 &gt; 3</math>                      (LaPlace Bedingung ist erfüllt)</p>

<p>eine Probe von 500 Masken. Bei der Prüfung der Masken sind 50 fehlerhaft. Beurteilen Sie mithilfe der <math>2\sigma</math>-Regel, ob das Misstrauen berechtigt ist.</p>	<p><math>\mu - 2\sigma = 27,86</math>  <math>\mu + 2\sigma = 52,14</math>  <math>50 \in [28; 52]</math>  Das Misstrauen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4% nicht gerechtfertigt.</p>
<p>g. Die Firma verspricht der Produktionsleiterin einen Bonus, wenn sie die Rate auf 6 % senkt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 400 Masken entnommen. Wenn sich darunter höchstens 25 fehlerhafte Masken befinden, wird der Bonus gewährt.</p> <p>i. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält die Produktionsleiterin den Bonus, obwohl sich die Fehlerrate nicht verbessert hat?</p> <p>ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält sie keinen Bonus, obwohl der Anteil der fehlerhaften Masken auf 6% gesunken ist?</p>	<p>i. <math>n = 400</math> <math>p = 0,08</math>  <math>P(X \leq 25) \approx 0,1128</math>  Die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Bonus erhält, beträgt 11,28%.</p> <p>ii. <math>n = 400</math> <math>p = 0,06</math>  <math>P(X &gt; 25) \approx 0,3656</math>  Die Wahrscheinlichkeit, dass sie keinen Bonus erhält, beträgt 36,56%.</p>
<p>h. Eine Apotheke erhält 48 Masken. Sie nimmt aber 50 Bestellungen entgegen, weil aus Erfahrung 10% der Bestellungen storniert werden.</p> <p>i. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden zu viele Buchungen angenommen?</p> <p>ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war sogar mehr als eine Maske übrig?</p>	<p><math>X =</math> Anzahl der tatsächlich abgeholten Bestellungen  <math>n = 50</math> <math>p = 0,9</math></p> <p>i. <math>P(X &gt; 48) \approx 0,03379</math>  Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 3,38% können nicht alle Bestellungen geliefert werden.</p> <p>ii. <math>P(0 \leq X \leq 46) \approx 0,7497</math>  Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 74,97% war sogar mehr als eine Maske übrig.</p>