

Lösungen zur Übungsklausur zur Differentialrechnung

| Aufgabe | Rechenweg | Ergebnis |
|---|---|---|
| <p>1. Berechnen Sie die Ableitung an der Stelle x_0 mit Hilfe des Differenzenquotienten!</p> <p>a. $f(x) = 2x^2$ $x_0 = 3$</p> <p>b. $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = -1$</p> | <p>a. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0+h)^2 - 2(x_0)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (3+h)^2 - 2 \cdot (3)^2}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (3)^2 + 2 \cdot 6h + 2h^2 - 2 \cdot (3)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 2h^2}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 2h) = 12$</p> <p>b. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-1+h} - \frac{1}{-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-1+h} + 1}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-1+h} + \frac{-1+h}{-1+h}}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \cdot (-1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-1+h} = -1$</p> | <p>12</p> <p>-1</p> |
| <p>2. Berechnen Sie die Tangente an $f(x)$ im Punkt P_0!</p> <p>a. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$ $P_0 = (3/?)$</p> <p>b. $f(x) = x^4 - 6x^5$ $P_0 = (-2/?)$</p> | <p>a. $f(3) = 112$ und $f'(x) = 9x^2 + 8x$, d.h. $f'(3) = 105$ $y = 105x + b$ $112 = 105 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -203$ $y = 105x - 203$</p> <p>b. $f(-2) = 208$ und $f'(x) = 4x^3 - 30x^4$, d.h. $f'(-2) = -512$ $y = -512x + b$ $208 = -512 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 1232$ $y = -512x + 1232$</p> | <p>a. $y = 105x - 203$</p> <p>b. $y = -512x + 1232$</p> |

| | | |
|--|---|---|
| <p>3. Leiten Sie zweimal ab!</p> <p>a. $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$</p> <p>b. $f(x) = 2x^{-2} + 4x^{-6}$</p> <p>c. $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{7}{8}}$</p> <p>d. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 9\sqrt[4]{x^3}$</p> <p>e. $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$</p> <p>f. $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx + d$</p> <p>g. $f(u) = 4u^3 + 3u + x^3$</p> <p>h. $f(z) = 3x + 4z^3 - \sqrt{x}$</p> | <p>a. $f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ $f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$</p> <p>b. $f'(x) = -4x^{-3} - 24x^{-7}$ $f''(x) = 12x^{-4} + 148x^{-8}$</p> <p>c. $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^{\frac{2}{3}-1} - \frac{7}{8} \cdot x^{\frac{7}{8}-1}$ $= 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}}$ $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} + \frac{7}{64} \cdot x^{-\frac{9}{8}}$</p> <p>d. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 9 \cdot x^{\frac{3}{4}}$ $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{27}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$ $f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} + \frac{27}{16} \cdot x^{-\frac{5}{4}}$</p> <p>e. $f(x) = x^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$ $f''(x) = 6 \cdot x^{-4}$</p> <p>f. $f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$ $f''(x) = 6ax - 2b$</p> <p>g. $f'(u) = 12u^2 + 3$ $f''(u) = 24u$</p> <p>h. $f'(z) = 12z^2$ $f''(z) = 24z$</p> | <p>a. $f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ $f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$</p> <p>b. $f'(x) = -4x^{-3} - 24x^{-7}$ $f''(x) = 12x^{-4} + 148x^{-8}$</p> <p>c. $f'(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}}$ $f''(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} + \frac{7}{64} \cdot x^{-\frac{9}{8}}$</p> <p>d. $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{27}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$ $f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} + \frac{27}{16} \cdot x^{-\frac{5}{4}}$</p> <p>e. $f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$ $f''(x) = 6 \cdot x^{-4}$</p> <p>f. $f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$ $f''(x) = 6ax - 2b$</p> <p>g. $f'(u) = 12u^2 + 3$ $f''(u) = 24u$</p> <p>h. $f'(z) = 12z^2$ $f''(z) = 24z$</p> |
| <p>4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4x$.</p> <p>a. Bestimmen Sie die Steigung der Kurve in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen!</p> <p>b. Wo hat der Graph die Steigung 6?</p> <p>c. Wo hat der Graph eine waagerechte Tangente?</p> <p>d. Welche Tangente an $f(x)$ steht senkrecht zu $y = \frac{1}{8}x + 3$?</p> | <p>a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$ $f(0) = 0$ $f'(x) = 2x - 4$ $f'(0) = -4$ $f'(4) = 4$</p> <p>b. $f'(x) = 6 \Leftrightarrow 2x - 4 = 6 \Leftrightarrow x = 5$</p> <p>c. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$</p> <p>d. zu zeigen: $f'(x) = -8$ (denn das Produkt der Steigung zweier senkrechter Geraden ist -1) $f'(x) = -8 \Leftrightarrow 2x - 4 = -8 \Leftrightarrow x = -2$ $f(-2) = 12$ $t(x) = -8x + b \Leftrightarrow 12 = -8 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = -4$</p> | <p>a. mit der x-Achse: bei 0: $f'(0) = -4$ und bei 4: $f'(4) = 4$ mit der y-Achse: bei 0: $f'(0) = -4$</p> <p>b. Der Graph hat bei 5 die Steigung 6.</p> <p>c. Der Graph hat bei 2 eine waagerechte Tangente.</p> <p>d. $t(x) = -8x - 4$</p> |

| | | |
|--|---|--|
| <p>5. Leiten Sie mit Hilfe der Produktregel ab!</p> <p>a. $f(x) = (4x^2 + 12x + 9) \cdot (2x + 3)$</p> <p>b. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos(x)$</p> <p>c. $f(x) = \ln(x) \cdot (x^2 + 2)$</p> <p>d. $f(u) = (u^7 - 3) \cdot (u^3 - 4u^{-2})$</p> | <p>a. $f'(x) = (8x + 12) \cdot (2x + 3) + (4x^2 + 12x + 9) \cdot 2$ $= 16x^2 + 24x + 24x + 36 + 8x^2 + 24x + 18$ $= 24x^2 + 72x + 54$</p> <p>b. $f'(x) = 2x \cdot \cos(x) + (x^2 + 1) \cdot (-\sin(x))$ $= 2x \cdot \cos(x) - (x^2 + 1) \cdot \sin(x)$</p> <p>c. $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 2) + \ln(x) \cdot 2x$</p> <p>d. $f'(u) = 7u^6 \cdot (u^3 - 4u^{-2}) + (u^7 - 3) \cdot (3u^2 + 8u^{-3})$ $= 7u^9 - 28u^4 + 3u^9 + 8u^4 - 9u^2 - 24u^{-3}$</p> | <p>a. $f'(x) = 24x^2 + 72x + 54$</p> <p>b. $f'(x) = 2x \cdot \cos(x) - (x^2 + 1) \cdot \sin(x)$</p> <p>c. $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (x^2 + 2) + \ln(x) \cdot 2x$</p> <p>d. $f'(u) = 7u^9 - 28u^4 + 3u^9 + 8u^4 - 9u^2 - 24u^{-3}$</p> |
| <p>6. Leiten Sie mit der Kettenregel ab!</p> <p>a. $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x)^4$</p> <p>b. $f(x) = \sqrt{4x^3 + 5x}$</p> <p>c. $f(x) = 2 \cdot e^{-3x+9}$</p> <p>d. $f(x) = 6 \cdot e^{\sqrt{x+1}}$</p> | <p>a. $f'(x) = 4 \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x)^3 \cdot (3x^2 - 8x)$ $= (12x^2 - 32x) \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x)^3$</p> <p>b. $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (12x^2 + 5) = (6x^2 + 2,5) \cdot (4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}}$</p> <p>c. $f'(x) = 2 \cdot (-3) \cdot e^{-3x+9} = -6 \cdot e^{-3x+9}$</p> <p>d. $f'(x) = 6 \cdot e^{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x+1}}$</p> | <p>a. $f'(x) = (12x^2 - 32x) \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x)^3$</p> <p>b. $f'(x) = (6x^2 + 2,5) \cdot (4x^3 + 5x)^{-\frac{1}{2}}$</p> <p>c. $f'(x) = -6 \cdot e^{-3x+9}$</p> <p>d. $f'(x) = 3 \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\sqrt{x+1}}$</p> |
| <p>7. a. Wo haben die Funktionen $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$ und $g(x) = 2x^3 + 9$ die gleiche Steigung?</p> <p>b. Berechnen Sie, wo der Graph von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ fällt!</p> | <p>a. $f'(x) = -6x + 12$ $g'(x) = 6x^2$ $-6x + 12 = 6x^2 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$</p> <p>b. gesucht: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 0$ Zuerst muss man die Nullstellen berechnen: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Nun muss man untersuchen, ob $f' < 0$ oder > 0 ist: $x < 2$, z.B. $x = 0$: $f'(0) = 4 > 0$, d.h. $f'(x) > 0$ für $x < 2$ $x > 2$, z.B. $x = 4$: $f'(4) = -8 < 0$ d.h. $f'(x) < 0$ für $x > 2$</p> | <p>a. Die Funktionen haben für $x = -2$ und $x = 1$ die gleiche Steigung.</p> <p>b. Der Graph fällt für alle $x > 2$.</p> |