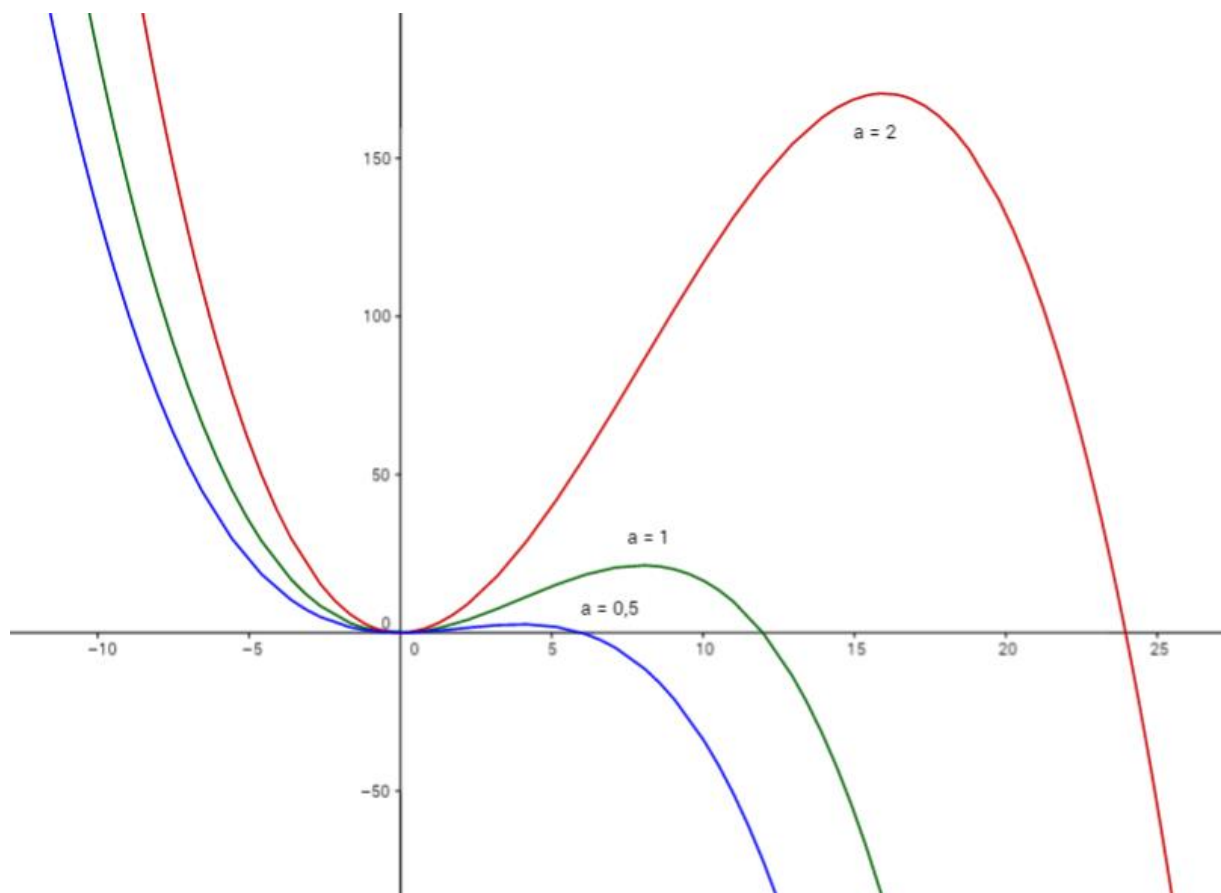


Übung für das Abitur: Funktionenschar

Gegeben ist $f_a(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2$; $a > 0$.

- Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle $x = 4$!
- Berechnen Sie die Nullstellen!
- Bestimmen Sie die Extrema
- Bestimmen Sie die Wendepunkte!
- Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse!



Lösung:

a. $f_a(4) = -\frac{16}{3} + 16a$

b. Nullstellen:

$$-\frac{1}{12}x^3 + ax^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \left(-\frac{1}{12}x + a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{12}x = a$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12a$$

c. Extrema:

$$f_a'(x) = -0,25x^2 + 2ax$$

$$f_a''(x) = -0,5x + 2a$$

$$f_a'''(x) = -0,5$$

notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$:

$$f_a'(x) = -0,25x^2 + 2ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (-0,25x + 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 0,25x = 2a$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8a$$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$:

$$f_a''(8a) = -4a + 2a = -2a < 0, \text{ da } a > 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$f_a''(0) = 2a > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f_a(8a) = -\frac{1}{12}(8a)^3 + a \cdot (8a)^2 = -\frac{128}{3}a^3 + 64a^3 = \frac{64}{3}a^3 \quad f_a(0) = 0$$

$$\text{HP } \left(8a/\frac{64}{3}a^3\right) \quad \text{TP } (0/0)$$

d. Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f_a''(x) = 0$:

$$f_a''(x) = -0,5x + 2a = 0 \Leftrightarrow 0,5x = 2a \Leftrightarrow x = 4a$$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f_a''(x) = 0$ und $f_a'''(x) \neq 0$:

$$f_a'''(4a) = -0,5 \neq 0 \Rightarrow \text{WP (mit maximaler Steigung)}$$

$$f_a(4a) = -\frac{1}{12}(4a)^3 + a \cdot (4a)^2 = -\frac{16}{3}a^3 + 16a^3 = \frac{32}{3}a^3$$

$$\text{WP}(4a/\frac{32}{3}a^3)$$

e. Fläche:

$$\int_0^{12a} \left(-\frac{1}{12}x^3 + ax^2\right) dx = \left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{a}{3}x^3\right]_0^{12a} = -432a^4 + 576a^4 - 0 = 144a^4$$