

Lösungen zu den Übungen zu Rotationskörpern

Aufgabe 1:

a. $f(x) = x^2 \quad I = [2;5]$

$$V = \pi \cdot \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \cdot \int_2^5 x^4 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot x^5 \right]_2^5 = \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot 5^5 - \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right] = \pi \cdot 618,6 \approx \mathbf{1943,39}$$

b. $f(x) = x \quad I = [-2;4]$

$$V = \pi \cdot \int_{-2}^4 (x)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_{-2}^4 = \pi \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 \right] = \pi \cdot 24 \approx \mathbf{75,4}$$

c. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x \quad I = [-4;2]$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-4}^2 \left(\frac{1}{3}x^2 + 6x \right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^2 \left(\frac{1}{9}x^4 + 4x^3 + 36x^2 \right) dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{1}{45}x^5 + x^4 + 12x^3 \right]_{-4}^2 = \pi \cdot \left[\frac{1}{45}2^5 + 2^4 + 12 \cdot 2^3 - \left(\frac{1}{45}(-4)^5 + (-4)^4 + 12(-4)^3 \right) \right] \\ &= \pi \cdot \left[\frac{5072}{45} - \left(-\frac{24064}{45} \right) \right] = \pi \cdot \frac{29136}{45} \approx \mathbf{2034,08} \end{aligned}$$

d. $f(x) = \sqrt{x+2} \quad I = [0;3]$

$$V = \pi \cdot \int_0^3 (\sqrt{x+2})^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 (x+2) dx = \pi \cdot [0,5x^2 + 2x]_0^3 = \pi \cdot 10,5 \approx \mathbf{32,99}$$

e. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad I = [1;5]$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_1^5 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^5 \left(x^4 + 2x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot x^5 + x^2 - x^{-1} \right]_1^5 \\ &= \pi \cdot (649,8 - 0,2) \approx \mathbf{2040,78} \end{aligned}$$

f. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad I = [-3; -0,5]$

Vorbemerkung: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = x+1$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-3}^{-0,5} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-3}^{-0,5} (x+1)^2 dx = \pi \cdot \int_{-3}^{-0,5} (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 + x^2 + x \right]_{-3}^{-0,5} = \pi \cdot [-0,292 - (-3)] = \pi \cdot 2,708 \approx \mathbf{8,51} \end{aligned}$$

g. $f(x) = x \cdot \sqrt{3x+2}$ $I = [4;6]$

$$V = \pi \cdot \int_4^6 (x \cdot \sqrt{3x+2})^2 dx = \pi \cdot \int_4^6 [x^2 \cdot (3x+2)] dx = \pi \cdot \int_4^6 (3x^3 + 2x^2) dx = \pi \cdot \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_4^6 = \pi \cdot (1116 - 234, \bar{6}) \approx \mathbf{2768,79}$$

Aufgabe 2:

a. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2$ $I = [0;1]$

Bemerkung: $f(x) \geq g(x)$ in I

$$V = \pi \cdot \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx = \pi \cdot \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \approx \mathbf{0,94}$$

b. $f(x) = 2x^3$ $g(x) = 8x$ $I = [0;2]$

Bemerkung: $g(x) \geq f(x)$ in I

$$V = \pi \cdot \int_0^2 [(8x)^2 - (2x^3)^2] dx = \pi \cdot \int_0^2 (64x^2 - 4x^6) dx = \pi \cdot \left[\frac{64}{3}x^3 - \frac{4}{7}x^7 \right]_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{2048}{3} - \frac{128}{7} \right) \approx \mathbf{306,38}$$

Aufgabe 3:

Berechne den Rauminhalt des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = -2x^2 + 16$ und $g(x) = x^4 + 8$ um die x-Achse rotiert, $x, f(x)$ in cm!

Schnittpunkte berechnen:

$$-2x^2 + 16 = x^4 + 8 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \quad (\text{Substitution})$$

$f(0) = 16$ und $g(0) = 8$, d.h. $f(x) \geq g(x)$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(-2x^2 + 16)^2 - (x^4 + 8)^2] dx \\ &= \pi \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(4x^4 - 64x^2 + 256) - (x^8 + 16x^4 + 64)] dx \\ &= \pi \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4x^4 - 64x^2 + 256 - x^8 - 16x^4 - 64] dx \\ &= \pi \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [-x^8 - 12x^4 - 64x^2 + 192] dx \\ &= \pi \cdot \left[-\frac{1}{9}x^9 - \frac{12}{5}x^5 - \frac{64}{3}x^3 + 192x \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \pi \cdot [195,099 - (-195,099)] \approx \mathbf{1225,84} \end{aligned}$$

Der Rauminhalt beträgt 1225,84 cm³.

Aufgabe 4:

Durch die Rotation der Fläche zwischen $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ und $g(x) = 0,6x + 3$ um die x-Achse entsteht eine 20 cm lange Vase, x , $f(x)$ und $g(x)$ in cm.

a. $g(20) - f(20) = 15 - 8,94 = 6,06$

Das Glas ist 6,06cm dick.

b.
$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^{20} (2 \cdot \sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \cdot \int_0^{20} 4x dx \\ &= \pi \cdot [2x^2]_0^{20} \\ &= \pi \cdot 800 \approx 2513,27 \end{aligned}$$

Das Volumen beträgt 2513,27cm³.

c.
$$\begin{aligned} &\pi \cdot \int_0^{20} [(0,6x + 3)^2 - (2 \cdot \sqrt{x})^2] dx \\ &= \pi \cdot \int_0^{20} [0,36x^2 + 3,6x + 9 - 4x] dx \\ &= \pi \cdot \int_0^{20} [0,36x^2 - 0,4x + 9] dx \\ &= \pi \cdot [0,12x^3 - 0,2x^2 + 9x]_0^{20} \\ &= \pi \cdot 1060 \approx 3330,09 \end{aligned}$$

Man braucht 3330,09 cm³ Glas.

Aufgabe 5:

Die Funktion $f(x) = 2x^3$ wird an der y-Achse rotiert. Berechne das Volumen des Rotationskörpers für $0 \leq f(x) \leq 16$!

Umkehrfunktion: $y = 2x^3 \Rightarrow x = 2y^3 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{0,5x}$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^{16} \left(\sqrt[3]{0,5x} \right)^2 dx \\ &= \pi \cdot \int_0^{16} (0,5x)^{\frac{2}{3}} dx \\ &= \pi \cdot \left[0,5^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^{16} \\ &= \pi \cdot 38,4 \approx 120,64 \end{aligned}$$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt 120,64 FE³.