Lösungen zu den Textaufgaben mit Ableitung und Integralen: Rekonstruktion von Beständen

Denken Sie daran, dass f die momentane Änderungsrate ist, also eigentlich die Ableitung f'!

Aufgabe 1: $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 15t^2 + 200t$

a. $f(10) = 833{,}33$
   Nach 10 Tagen steigert sich die Ansteckungsrate auf ca. 833 Menschen/Tag.
b. Gesucht: Maximum von f:
   $f'(t) = t^2 - 30t + 200$ und $f''(t) = 2t - 30$
   $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 20$
   $f''(10) = -10 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\qquad f(10) = 833$ s.o.
   $f''(20) = 10 > 0 \Rightarrow$ Minimum
   Untersuchung der Ränder: $f(0) = 0$ und $f(24) = 768$
   Nach 10 Tagen infizieren sich die meisten Menschen, nämlich 833.
c. Gesucht: die Tangente an f im Punkt P(24/f(24)):
   $f(24) = 768 \qquad m = f'(24) = 56 \Rightarrow g(t) = 56t + b$
   Einsetzen von P: $768 = 56 \cdot 24 + b \Rightarrow b = -576$

$\Rightarrow$ $g(t) = 56t - 576$
   $822 = 56t - 576 \Leftrightarrow t = 24{,}96$
   Nach ca. 25 Tagen stecken sich 822 Menschen neu an.

Aufgabe2: $f(x) = 0{,}1x^4 - 2x^3 + 9{,}6x^2$

a. $\int_0^5 f(x)dx = [0{,}02x^5 - 0{,}5x^4 + 3{,}2x^3]_0^5 = 150$
   $150 \cdot 10 + 20.000 = 21.500$
   Nach 5 Minuten befinden sich 21.500 l im Tank.
b. Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Benzinmenge im Tank maximal ist!
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8 \vee x = 12$
   $f(x) > 0$ für $0 < x < 8$: in den ersten 8 Minuten fließt mehr dazu
   $f(x) < 0$ für $8 < x < 12$: von 8 bis 12 Minuten fließt mehr ab als zu
   Nach 8 Minuten ist die Benzinmenge im Tank am größten.
c. Gesucht: Maximum von f(x):
   $f'(x) = 0{,}4x^3 - 6x^2 + 19{,}2x = 0 \Leftrightarrow x \approx 4{,}63 \vee x \approx 10{,}37$
   $f''(x) = 1{,}2x^2 - 12x + 19{,}2$
   $f''(4{,}63) \approx -10{,}64 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\quad f(4{,}63) \approx 53{,}24$
   $f''(10{,}37) \approx 23{,}8 > 0 \Rightarrow$ Minimum
   [Ränder: $f(0) = 0$ und $f(12) = 0$]
   Nach 4,63 Minuten steigt die Benzinmenge mit 532,4 l/min am stärksten an.

Aufgabe 3: $f(x) = x^4 - 14x^3 - 19x^2 + 476x + 480$

a. $f(7) = 480$
   Nach 7 Tagen steigert sich die Rate der Menschen, die eine twitter-Nachricht erhalten, auf 480/Tag.
b. Gesucht: Maximum der Stammfunktion F:
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1 \vee x = 8 \vee x = 12$
   $f'(x) = 4x^3 - 42x^2 - 38x + 476$

f'(8) = −468 < 0 => Maximum

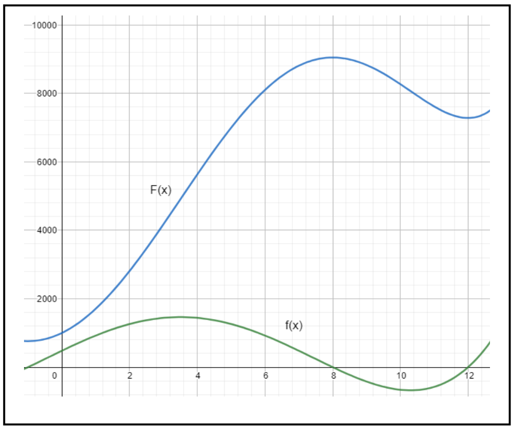
[f'(12) = 884 > 0 => Minimum]

F(x) = $\int_0^x f(t)dt$ + 1000 = $0{,}2x^5 - 3{,}5x^4 - \frac{19}{3}x^3 + 238x^2 + 480x + 1000$ gibt die Anzahl der Menschen an, die die Nachricht auf ihren Geräten hat.

F(8) = 9046,93

Untersuchung der Ränder: F(0) = 1000, F(12,5) = 7403,65

Nach 8 Tagen haben die meisten Menschen diese Nachricht erhalten, es sind dann 9046 Menschen.



c. Gesucht: Minimum von f:

f'(x) = $4x^3 - 42x^2 - 38x + 476$ und f''(x) = $12x^2 - 84x - 38$

f'(x) = 0 ⇔ x ≈ −3,3 v x = 3,5 v x ≈ 10,3

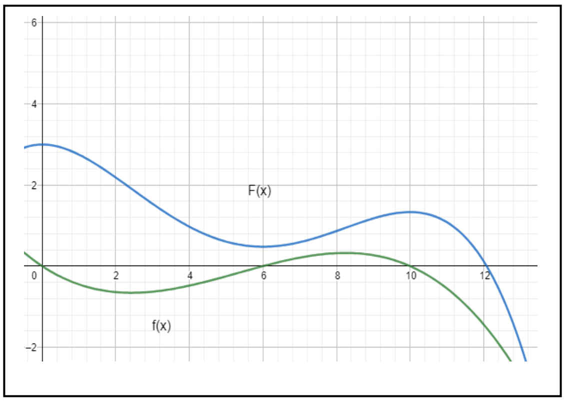
f''(3,5) = − 185 < 0 => Maximum

f''(10,3) = 369,88 > 0 => Minimum f(10,3) = −676

Untersuchung der Ränder: f(0) = 480 und f(14) = 3420

Nach 10,3 Tagen müssen neue Nachrichten produziert werden.

Aufgabe 4: f(x) = −0,01 · x · (x−6) · (x−10) = $-0{,}01x^3 + 0{,}16x^2 - 0{,}6x$



a.]0; 6[: Wasser fließt ab (da f(x) <0)

]6; 10[: Wasser fließt zu

ab 10: Wasser fließt ab

b. Gesucht: Maximum von f:

f'(x) = $-0{,}03x^2 + 0{,}32x - 0{,}6$ und f''(x) = $-0{,}06x + 0{,}32$

f'(x) = 0 ⇔ x ≈2,43 v x ≈8,24

f''(2,43) ≈ 0,174 > 0 => Minimum

f''(8,24) ≈ −0,174 < 0 => Maximum f(8,24) ≈ 0,325

Untersuchung der Ränder: f(0) = 0 und f(10,5) ≈ −0,236

Die Wassermenge steigt nach 8,24 Tagen am stärksten.

c. Gesucht: Minimum der Stammfunktion F:

Die geringste/höchste Wasserstandshöhe ist bei den Nullstellen von f:

f(x) = 0 ⇔ x = 6 v x = 10

Da f(x) < 0 für x < 6 und f(x) > 0 für x > 6 handelt es sich bei x = 6 um ein Minimum (VZW von – nach +)

Alternativ: f'(6) und f'(10) ausrechnen.

F(x) = $\int_0^x f(t)dt$ + 3 = $-0{,}0025x^4 + \frac{0{,}16}{3}x^3 - 0{,}3x^2 + 3$; F(6) = 0,48

Untersuchung der Ränder: F(0) = 2, F(10,5) ≈1,27

Nach 6 Monaten ist der Wasserstand mit 0,48m am niedrigsten.

d. $\frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} F(x)dx$

$= \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} (-0{,}0025x^4 + \frac{0{,}16}{3}x^3 - 0{,}3x^2 + 3)dx = \frac{1}{10} \cdot \left[-0{,}0005x^5 + \frac{0{,}04}{3}x^4 - 0{,}1x^3 + 3x\right]_0^{10}$

$= \frac{1}{10} \cdot 13{,}33 \approx 1{,}33$

Der See ist in den ersten 10 Tagen im Durchschnitt 1,33m tief.