Lösung Kurvendiskussion von zusammengesetzten e-Funktionen

$f(x) = 2x^2 \cdot e^{-0,1x}$

Nullstellen:

$2x^2 \cdot e^{-0,1x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \lor e^{-0,1x} = 0$ (ein Produkt ist 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist)

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \lor e^{-0,1x} \neq 0$

Nullstellen: $x = 0$

Extrema:

$f'(x) = 4x \cdot e^{-0,1x} + 2x^2 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1x} = e^{-0,1x} \cdot (4x - 0,2x^2)$ (mit Ketten- und Produktregel)

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,1x} \cdot (4x - 0,2x^2)$

$\Leftrightarrow e^{-0,1x} = 0 \lor 4x - 0,2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{-0,1x} \neq 0 \lor x = 0 \lor x = 20$

$f''(x) = e^{-0,1x} \cdot (4x - 0,2x^2) \cdot (-0,1) + e^{-0,1x} \cdot (4 - 0,4x) = (0,02x^2 - 0,8x + 4) \cdot e^{-0,1x}$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$:

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ Minimum $\quad f(0) = 0$

$f''(20) = -2,7 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\quad f(20) \approx 108,27$

$HP(20/\approx 108,27) \qquad TP(0/0)$

Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow (0,02x^2 - 0,8x + 4) \cdot e^{-0,1x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-0,1x} = 0 \lor 0,02x^2 - 0,8x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow e^{-0,1x} \neq 0 \quad x \approx 5,85 \lor x \approx 34,14$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$:

$f'''(5,85) \approx -0,31 \neq 0$ (maximale Steigung) $\quad f(5,85) \approx 38,13$

$f'''(34,14) \approx 0,01 \neq 0$ (minimale Steigung) $\quad f(34,14) \approx 76,71$

$W_1(5,85/\approx 38,13) \qquad W_2(34,14/\approx 76,71)$

Krümmungsverhalten:

$x < 5,85$, z.B. $x = 0$: $f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt

$5,85 < x < 34,14$, z.B. $x = 10$: $f''(10) \approx -0,74 < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt

$x > 34,14$, z.B. $x = 40$: $f''(40) \approx 0,073 > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt

f ist linksgekrümmt für $x < 5,85$

f ist linksgekrümmt für $x > 34,14$

f ist rechtsgekrümmt für $5,85 < x < 34,14$

Grenzverhalten:

$\lim_{x \to \infty} (2x^2 \cdot e^{-0,1x}) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} (2x^2 \cdot e^{-0,1x}) = \infty$

da die Steigung der e-Funktion stärker ist als die jeder ganzrationalen Funktion, bestimmt die e-Funktion das Verhalten des Graphen im Unendlichen

$f(x) = (4 + 4x) \cdot e^{2x}$

Nullstellen:

$f(x) = (4x + 4) \cdot e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \quad \vee\ e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow 4x = -4 \qquad (e^{4x} \neq 0) \quad \Leftrightarrow x = -1$

Nullstelle: $x = -1$

Extrema:

$f'(x) = 4 \cdot e^{2x} + (4x + 4) \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} \cdot (4 + 8x + 8) = e^{2x} \cdot (8x + 12)$

$f''(x) = 8 \cdot e^{2x} + (8x + 12) \cdot e^{2x} \cdot 2$

$= e^{2x} \cdot (8 + 16x + 24) = e^{2x} \cdot (16x + 32)$

$f'(x) = e^{2x} \cdot (8x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow 8x + 12 = 0 \quad \vee\ e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow 8x = -12 \qquad (e^{2x} \neq 0)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f''(-\frac{3}{2}) = e^{-3} \cdot (-24 + 32) = 8 \cdot e^{-3} > 0 \Rightarrow$ Minimum $\qquad f(-\frac{3}{2}) = -2 \cdot e^{-3} \approx -0{,}0996$

$TP(-\frac{3}{2} / -2 \cdot e^{-3})$

Wendepunkte:

$f''(x) = e^{2x} \cdot (16x + 32)$

$f'''(x) = 16 \cdot e^{2x} + (16x + 32) \cdot e^{2x} \cdot 2$

$= e^{2x} \cdot (16 + 32x + 64) = e^{2x} \cdot (32x + 80)$

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} \cdot (16x + 32) = 0$

$\Leftrightarrow (16x + 32) = 0 \quad \vee\ e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \qquad\qquad (e^{2x} \neq 0)$

$f'''(-2) = e^{-4} \cdot (-64 + 80) = 16 \cdot e^{-4} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

$f(-2) = -4 \cdot e^{-4} \approx -0{,}073$

$W(-2 / \approx -0{,}073)$

Krümmungsverhalten:

$x < -2$, z.B. $x = -4$: $f''(-4) = -32 \cdot e^{-4} < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt

$x > -2$, z.B. $x = 0$: $f''(0) = 32 > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt

für $x < -2$ ist f rechtsgekrümmt,

für $x > -2$ ist f linksgekrümmt

$\lim_{x\to\infty} [\underbrace{(4 + 4x)}_{\infty} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\infty}] = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} [\underbrace{(4 + 4x)}_{-\infty} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{0}] = 0$

(da die e-Funktion den Verlauf bestimmt)

$f(x) = (2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2}$

Nullstellen:

$(2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2} = 0 \Leftrightarrow 2{,}5x^2 - 125 = 0 \lor e^{0{,}4x-2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 50 \quad \lor e^{0{,}4x-2} \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{50} \lor x = -\sqrt{50}$

Nullstellen: $x = \sqrt{50}\ (\approx 7{,}07) \lor x = -\sqrt{50}$

Extrema:

$f'(x) = (5x) \cdot e^{0{,}4x-2} + (2{,}5x^2 - 125) \cdot (0{,}4) \cdot e^{0{,}4x-2} = e^{0{,}4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50)$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50) = 0$

$\Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} = 0 \lor (x^2 + 5x - 50) = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} \neq 0 \lor\ x = 5 \lor t = -10$

$f''(x) = e^{0{,}4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50) \cdot (0{,}4) + e^{0{,}4x-2} \cdot (2x + 5) = (0{,}4x^2 + 4x - 15) \cdot e^{0{,}4x-2}$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$:

$f''(5) = 15 > 0 \Rightarrow$ Minimum $\qquad f(5) = -62{,}5$

$f''(-10) \approx -0{,}037 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\quad f(20) \approx -155{,}23$

$HP(-10/-62{,}5) \qquad TP(20/\approx -155{,}23)$

Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow (0{,}4x^2 + 4x - 15) \cdot e^{0{,}4x-2} = 0$

$\Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} = 0 \lor 0{,}4x^2 + 4x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} \neq 0\ \ x \approx -12{,}9 \lor x \approx 2{,}9$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$:

$f'''(x) = (0{,}4x^2 + 4x - 15) \cdot 0{,}4 \cdot e^{0{,}4x-2} + (0{,}8x + 4) \cdot e^{0{,}4x-2} = (0{,}16x^2 + 2{,}4x + 2) \cdot e^{0{,}4x-2}$

$f'''(-12{,}9) \approx -55{,}02 \neq 0$ (maximale Steigung) $\quad f(-12{,}9) \approx 0{,}23$

$f'''(2{,}9) \approx 0{,}45 \neq 0$ (minimale Steigung) $\quad f(2{,}9) \approx -44{,}89$

$W_1(-12{,}9/\approx 0{,}23) \qquad W_2\ (2{,}9/\approx -44{,}89)$

Krümmungsverhalten:

$x < -12{,}9$, z.B. $x = -20$: $f''(-20) \approx 0{,}003 > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt

$-12{,}9 < x < 2{,}9$, z.B. $x = 10$: $f''(0) \approx -2{,}03 < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt

$x > 2{,}9$, z.B. $x = 10$: $f''(10) \approx 480{,}29 > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt

$x < -12{,}9 \Rightarrow$ f ist linksgekrümmt

$-12{,}9 < x < 2{,}9 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt

$x > 2{,}9 \Rightarrow$ f ist linksgekrümmt

Grenzverhalten:

$\lim_{x\to\infty} (2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} (2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2} = 0$