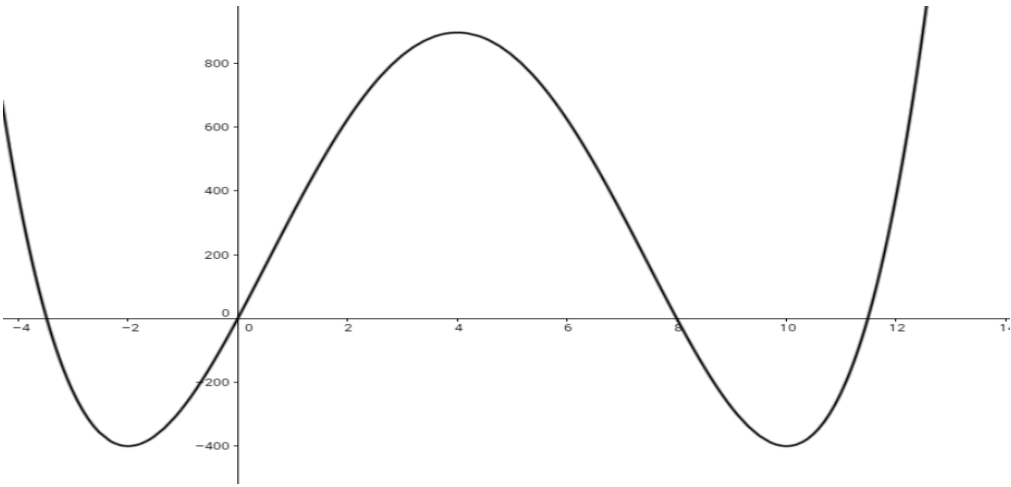
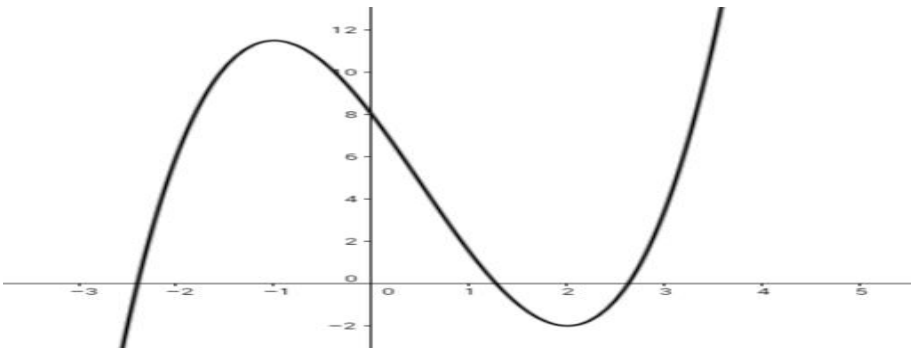


## Lösungen zu Aufgaben zur Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen:

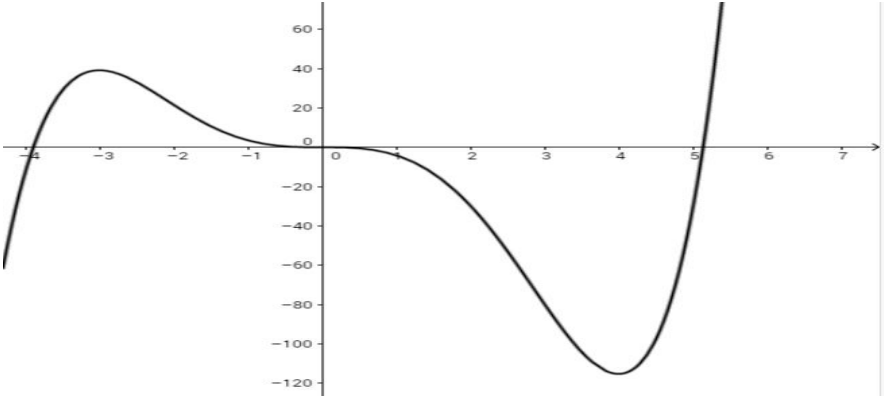
1. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
$f(x) = x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 320x$		
Nullstellen	$x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 320x = 0$ $x \cdot (x^3 - 16x^2 + 24x + 320) = 0$ $x = 0 \vee 4x^3 - 16x^2 + 24x + 320 = 0$ $x = 0 \vee x \approx -3,48 \vee x = 8 \vee x \approx 11,48$ (TR oder Poynomdivision)	$x = 0$ $x \approx -3,48$ $x = 8$ $x \approx 11,48$
Schnittpunkt mit der y-Achse	$f(0) = 0$	$S_y (0/0)$
Symmetrie	$f(-x) = x^4 + 16x^3 + 24x^2 - 320x \neq f(x)$ , also keine Achsensymmetrie $f(-x) = x^4 + 16x^3 + 24x^2 - 320x \neq -f(x) = -x^4 + 16x^3 - 24x^2 - 320x$ , also keine Punktsymmetrie <b>oder</b> keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie

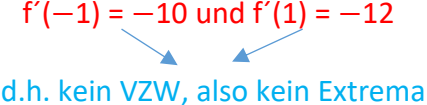
Extrema	$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320$ $f''(x) = 12x^2 - 96x + 48$  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 12x + 80 = 0$ $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4 \vee x = 10$ (TR oder Polynomdivision)  $f''(-2) = 288$ , d.h. Minimum $f(-2) = -400$ $f''(4) = -144$ , d.h. Maximum $f(4) = 896$ $f''(10) = 288$ , d.h. Minimum $f(10) = -400$	Minimum $(-2/-400)$ Maximum $(4/896)$ Minimum $(10/-400)$
Wendepunkte	$f''(x) = 12x^2 - 96x + 48$ $f'''(x) = 24x - 96$  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 96x + 48 = 0$ $\Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{12} (\approx 7,46) \vee x = 4 - \sqrt{12} (\approx 0,54)$ $f'''(7,46) \approx 83,14$ , d.h. Wendepunkt und minimaler Steigung $f(7,46) \approx 177,36$ $f'''(0,54) \approx -83,14$ , d.h. Wendepunkt und maximaler Steigung $f(0,54) \approx 177,36$	$W_1 (\approx 7,46 / \approx 177,36)$ $W_2 (\approx 0,54 / \approx 177,36)$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ , denn es handelt sich um eine Funktion vierten Grades, die vor $x^4$ eine positive Zahl (nämlich 1) hat.	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
Monotonie	$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4 \vee x = 10$ $x < -2$ : $f'(-3) = -364 < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend $x \in [-2; 4]$ : $f'(0) = 320 > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend $x \in [4; 10]$ : $f'(5) = -140 < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend $x > 10$ : $f'(12) = 896 > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend	f ist streng monoton steigend für $x \in [-2; 4]$ und $x > 10$ f ist streng monoton fallend für $x \in [4; 10]$ und $x < -2$

Krümmungsverhalten	$f''(x) = 12x^2 - 96x + 48 = 0 \Leftrightarrow x \approx 7,46 \vee x \approx 0,54$ $x < 0,54: f''(0) = 48 \Rightarrow$ linksgekrümmt $x \in [0,54, 7,46]: f''(4) = -144 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt $x > 7,46: f''(8) = 48 \Rightarrow$ linksgekrümmt	f ist rechtsgekrümmt für $x \in [0,54; 7,46]$ , ansonsten linksgekrümmt.
--------------------	--	--

2. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
$f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 8$		
Nullstellen	$x^3 - 1,5x^2 - 6x + 8 = 0$ $x \approx -2,4 \vee x \approx 1,27 \vee x \approx 2,62$ (mit TR)	$x \approx -2,4 \vee x \approx 1,27$ $\vee x \approx 2,62$
Achsenschnittpunkt mit der y-Achse	$f(0) = 8$	$S_y(0/8)$
Symmetrie	$f(-x) = -x^3 - 1,5x^2 + 6x + 8 \neq f(x)$ , also keine Achsensymmetrie $f(-x) = -x^3 - 1,5x^2 + 6x + 8 \neq -f(x) = -x^3 + 1,5x^2 + 6x - 8$ , also keine Punktsymmetrie <b>oder</b> keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie

Extrema	$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ $f''(x) = 6x - 3$  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$ (TR oder p-q-Formel)  $f''(2) = 9$ , d.h. Minimum $f(2) = -2$ $f''(-1) = -9$ , d.h. Maximum $f(-1) = 11,5$	Minimum (2/-2) Maximum (-1/11,5)
Wendepunkte	$f''(x) = 6x - 3$ $f'''(x) = 6$  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$ $f'''(0,5) = 6 > 0$ , d.h. Wendepunkt und minimale Steigung $f(0,5) = 4,75$	W(0,5/4,75)
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , denn es handelt sich um eine Funktion dritten Grades, die vor $x^3$ eine positive Zahl (nämlich 1) hat.	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
Monotonie	$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$ $x < -1$ : $f'(-2) = 12 > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend $x \in [-1; 2]$ , $f'(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend $x > 2$ : $f'(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend	f ist im Intervall $[-1; 2]$ streng monoton fallend, ansonsten streng monoton steigend
Krümmungsverhalten	$f''(x) = 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$ $x < 0,5$ : $f''(0) = -3 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt $x > 0,5$ : $f''(3) = 15 \Rightarrow$ linksgekrümmt	f ist rechtsgekrümmt für $x < 0,5$ und linksgekrümmt für $x > 0,5$

3. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
$f(x) = 0,2x^5 - 0,25x^4 - 4x^3$		
Nullstellen  Achsen Schnittpunkt mit der y-Achse	$0,2x^5 - 0,25x^4 - 4x^3 = 0$ $x^3 \cdot (0,2x^2 - 0,25x - 4) = 0$ (p-q-Formel oder TR) $x = 0 \vee x \approx -3,89 \vee x \approx 5,14$  $f(0) = 0$	$x = 0 \vee x \approx -3,89$ $\vee x \approx 5,14$  $S_y(0/0)$
Symmetrie	$f(-x) = -0,2x^5 - 0,25x^4 + 4x^3 \neq f(x) = +0,2x^5 - 0,25x^4 - 4x^3$ , also keine Achsensymmetrie $f(-x) = -0,2x^5 - 0,25x^4 + 4x^3 \neq -f(x) = -0,2x^5 + 0,25x^4 - 4x^3$ , also keine Punktsymmetrie <b>oder</b> keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie
Extrema	$f'(x) = x^4 - x^3 - 12x^2$ $f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 24x$  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - 12x^2 = \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 4$ $f''(3) = -63$ , d.h. Maximum $f''(0) = 0$ Sonderfall!	Minimum (4/-115,2) Maximum (-3/39,15)

	$f''(4) = 112$ , d.h. Minimum $f(-3) = 39,15$ $f(4) = -115,2$ Untersuchung auf VZW bei $f'$ : $f'(-1) = -10$ und $f'(1) = -12$  d.h. kein VZW, also kein Extrema	
Wendepunkte	$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 24x$ $f'''(x) = 12x^2 - 6x - 24$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x \approx -2,1 \vee x \approx 2,85$ $f'''(0) = -24 < 0$ , d.h. Wendepunkt und maximale Steigung $f(0) = 0$ $f'''(-2,1) \approx 41,25 > 0$ , d.h. Wendepunkt mit minimaler Steigung $f(-2,1) \approx 24,01$ $f'''(2,85) \approx 56,37 > 0$ , d.h. Wendepunkt mit minimaler Steigung $f(2,85) \approx -71,48$	$W_1(0/0)$ $W_2(-2,1/24,01)$ $W_3(2,85/-71,48)$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
Monotonie	$f'(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 4$ $x < -3$ : $f'(-4) = 128 > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend $x \in [-3; 0]$ : $f'(-1) = -10 < 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend $x \in [0; 4]$ : $f'(1) = -12 < 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend $x > 4$ : $f'(5) = 200 > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend	$f$ ist streng monoton steigend für $x < -3$ und für $x > 4$ $f$ ist streng monoton fallend im Intervall $[-3; 0]$ und im Intervall $[0; 4]$
Krümmungsverhalten	$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x \approx -2,1 \vee x \approx 2,85$ $x < -2,1$ : $f''(-3) = -63 \Rightarrow f$ ist rechtsgekrümmt $x \in [-2,1; 0]$ : $f''(-1) = 17 \Rightarrow f$ ist linksgekrümmt $x \in [0; 2,85]$ : $f''(2) = -28 \Rightarrow f$ ist rechtsgekrümmt $x > 2,85$ : $f''(3) = 9 \Rightarrow f$ ist linksgekrümmt	$f$ ist rechtsgekrümmt für $x < -2,1$ und $x \in [0; 2,85]$ $f$ ist linksgekrümmt für $x \in [-2,1; 0]$ und $x > 2,85$