Lösungen zu den Steckbriefaufgaben

Aufgabe 1:

Geben Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion an, die durch die Punkte P(1/5), Q(−2/26) und R(3/21) geht!

$f(x) = ax^2 + bx + c$

P(1/5) einsetzen: $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5$

Q(−2/26) einsetzen: $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 26$

R(3/21) einsetzen: $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 21$

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix} a+b+c=5 \\ 4a-2b+c=26 \\ 9a+3b+c=21 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I \\ (-1)\cdot II \\ (-1)\cdot III \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} a+b+c=5 \\ -4a+2b-c=-26 \\ -9a-3b-c=-21 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} a+b+c=5 \\ -3a+3b=-21 \\ -8a-2b=-16 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I \\ I+II \\ I+III \end{matrix}$$

Nun berechnet man das Gleichungssystem mit 2 Unbekannten:

$$\left|\begin{matrix} -3a+3b=-21 \\ -8a-2b=-16 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} -6a+6b=-42 \\ -24a-6b=-48 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} -6a+6b=-42 \\ -30a=-90 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I \\ I+II \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{matrix} -6\cdot 3+6b=-42 \\ a=3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I \\ I+II \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} b=-4 \\ a=3 \end{matrix}\right|$$

Einsetzen in eine der ersten Gleichungen, z. B. in $a+b+c=5$:

$3 - 4 + c = 5 \Leftrightarrow c = 6$

$\Rightarrow$ $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$

Aufgabe 2:

Gesucht ist die Funktion dritten Grades, die durch den Ursprung geht, in $P(4/-\frac{80}{3})$ ein Minimum und in x = −2 ein Maximum hat.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Da sie durch den Ursprung geht, ist d = 0 => $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$P(4/-\frac{80}{3})$ einsetzen: $64a + 16b + 4c = -\frac{80}{3}$

Minimum bei x = 4: $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b + c = 0$

Maximum bei x = −2: $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4b + c = 0$

Man erhält das folgende Gleichungssystem, das man wie oben löst:

$$\left|\begin{matrix} 64a+16b+4c=-\frac{80}{3} \\ 48a+8b+c=0 \\ 12a-4b+c=0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I:(-4) \\ (-1)\cdot II \\ III \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} -16a-4b-c=\frac{20}{3} \\ -48a-8b-c=0 \\ 12a-4b+c=0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} -4a-8b=\frac{20}{3} \\ -36a-12b=0 \\ 12a-4b+c=0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I+III \\ II+III \\ III \end{matrix}$$

Nun berechnet man das Gleichungssystem mit 2 Unbekannten:

$$\left|\begin{matrix} -4a - 8b = \frac{20}{3} \\ -36a - 12b = 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \cdot(-9) \\ II \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 36a + 72b = -60 \\ -36a - 12b = 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 60b = -60 \\ -36a - 12b = 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I + II \\ II \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{matrix} b = -1 \\ -36a - 12 \cdot (-1) = 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} I \\ I \text{ in } II \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} b = -1 \\ a = \frac{1}{3} \end{matrix}\right|$$

Einsetzen in eine der ersten Gleichungen, z. B. in $12a - 4b + c = 0$:

$4 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$

Aufgabe 3:

Welche zum Ursprung punktsymmetrische Funktion dritten Grades hat in $x_0 = 1$ ein Minimum und geht durch den Punkt P(2/4)?

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Da sie durch den Ursprung geht, ist $d = 0$.

Da sie punktsymmetrisch ist, kann sie nur ungerade Exponenten enthalten, also ist $b = 0$.

$f(x) = ax^3 + cx$

P(2/4) einsetzen: $8a + 2c = 4$

$f'(x) = 3ax^2 + c$

Minimum bei $x_0 = 1$: $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 0$

Man erhält das folgende Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix} 8a + 2c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 8a + 2c = 4 \\ c = -3a \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 8a + 2 \cdot (-3a) = 4 \\ c = -3a \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} 2a = 4 \\ c = -3a \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} a = 2 \\ c = -6 \end{matrix}\right|$$

$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 6x$

Aufgabe 4:

Gesucht ist eine achsensymmetrische Funktion vierten Grades, die die y-Achse bei 4 schneidet. Sie hat in P(2/804) einen Wendepunkt!

$f(x) = ax^4+bx^3 + cx^2 +dx +e$

f ist achsensymmetrisch => alle ungeraden Potenzen entfallen,

d.h. $b = 0$ und $d = 0$ => $f(x) = ax^4+ cx^2 + e$

P(0/4) => $e = 4$ => $f(x) = ax^4+ cx^2 + 4$

$f(2) = 804 \Leftrightarrow 16a +4c + 4 = 804$

$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

$f''(x) = 12ax^2 + 2c$

$f''(2) = 0 \Leftrightarrow 48a + 2c = 0$

$$\left|\begin{array}{r} 16a + 4c + 4 = 804 \\ 48a + 2c = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 16a + 4c = 800 \\ -24a = c \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 16a + 4 \cdot (-24a) = 800 \\ -24a = c \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} -80a = 800 \\ -24a = c \end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{r} a = -10 \\ 240 = c \end{array}\right|$$

⇨ $f(x) = -10x^4 + 240x^2 + 4$

Aufgabe 5:

Geben Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion an, die die x-Achse bei 3 schneidet und im Punkt P(−1/−32) eine waagerechte Tangente hat!

$f(x) = ax^2 + bx + c$

P(3/0) einsetzen => $9a + 3b + c = 0$

P(−1/−32) einsetzen => $a - b + c = -32$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$

$$\left|\begin{array}{r} 9a + 3b + c = 0 \\ a - b + c = -32 \\ -2a + b = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 9a + 6a + c = 0 \\ a - 2a + c = -32 \\ b = 2a \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 15a + c = 0 \\ -a + c = -32 \\ b = 2a \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 15a + a - 32 = 0 \\ c = a - 32 \\ b = 2a \end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{r} a = 2 \\ c = 2 - 32 = -30 \\ b = 2 \cdot 2 = 4 \end{array}\right|$$

⇨ $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$

Aufgabe 6:

Welche achsensymmetrische Funktion zweiten Grades, die die y-Achse bei 8 schneidet, schließt mit der x-Achse im Intervall [0;1] eine Fläche von $\frac{22}{3}$ ein?

$f(x) = ax^2 + bx + c$

f ist achsensymmetrisch => alle ungeraden Potenzen entfallen => $b = 0$

$f(x) = ax^2 + c$

P(0/8) einsetzen: $c = 8$ => $f(x) = ax^2 + 8$

$\int_0^2 (ax^2 + 8)dx = \frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}ax^3 + 8x\right]_0^1 = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a + 8 = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow a = -2$

⇨ $f(x) = -2x^2 + 8$