Lösungen zu den Übung zu Binomialverteilungen 2: Berechnung der Länge n

Aufgabe	Lösung
1. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,6. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Anzahl n der Bernoulli-Experimente! a. $P(X=0) \leq 0{,}2$ b. $P(X=n) \leq 0{,}01$	a. $B_{n;0,6}(0) \leq 0{,}2 \Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^n \leq 0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}4^n \leq 0{,}2$ $\Leftrightarrow \ln(0{,}4^n) \leq \ln(0{,}2)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}4) \leq \ln(0{,}2)$ $\Leftrightarrow n \geq^{*} \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}4)} \approx 1{,}75$ *da ln(0,4) < 0 n muss mindestens 2 sein. b. $P_{n;0,6}(X=n) \leq 0{,}01 \Leftrightarrow \binom{n}{n} \cdot 0{,}6^n \cdot 0{,}4^0 \leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow 0{,}6^n \leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow \ln(0{,}6^n) \leq \ln(0{,}01)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}6) \leq \ln(0{,}01)$ $\Leftrightarrow n \geq^{*} \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \approx 9{,}01$ *da ln(0,6) < 0 n muss mindestens 10 sein.
2. Die 17- bis 25jährigen sind durchschnittlichen 3 Stunden mit ihrem Handy beschäftigt, das sind bei einem Schlafkonsum von 8 Stunden etwa 18,75% ihrer wachen Zeit. a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man tagsüber unter 12 Jugendlichen mindestens 8 findet, die sich gerade mit ihrem Handy beschäftigen? b. Wie viele junge Erwachsene muss man mindestens untersuchen, um mit einer 90%igen Wahrscheinlichkeit mindestens einen zu finden, der sein Handy <u>eingeschaltet</u> hat?	a. $F_{12;0,8125}(8 \leq X \leq 12) \approx 0{,}000366$ Die Wahrscheinlichkeit mindestens 8 Jugendliche mit Handys anzutreffen liegt bei 0,036%. b. p = 1− p(keiner hat sein Handy <u>eingeschaltet</u>) = $1 - B_{n;0,1875}(0)$ $1 - B_{n;0,1875}(0) = 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}1875^0 \cdot 0{,}8125^n = 0{,}9$ $\Leftrightarrow 1 - 0{,}8125^n = 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}8125^n = 0{,}1^{*} \Leftrightarrow \ln(0{,}8125^n) = \ln(0{,}1)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}8125) = \ln(0{,}1) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8125)} \Leftrightarrow n = 11{,}089$ Man muss ungefähr 11 Personen untersuchen. mit TR*: nSolve$((0.8125)^n = 0.1, n)$ 11.0893
3. Bei den 12 bis 17jährigen fällt die Raucherquote ständig. Im Jahr 2014 haben 10% dieser Jugendlichen angegeben, zu rauchen. a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man unter 20 Jugendlichen mindestens 18 findet, die nicht rauchen?	a. $F_{20;0,9}(18 \leq X \leq 20) \approx 0{,}6769$ Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 18 Nichtraucher zu finden, liegt bei 67,69%. b. $1 - B_{n;0,1}(0) \geq 0{,}8 \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n \geq 0{,}8$ $\Leftrightarrow 1 - 0{,}9^n \geq 0{,}8 \Leftrightarrow 0{,}9^n \leq 0{,}2 \Leftrightarrow \ln(0{,}9^n) \leq \ln(0{,}2)$

b. Wie viele junge Erwachsene muss man untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens einen zu finden, der raucht?	$\Leftrightarrow$ n $\cdot$ ln (0,9) $\le$ ln(0,2) $\Leftrightarrow$ n $\ge^*$ $\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)}$ $\Leftrightarrow$ n $\ge$ 15,27 *da ln(0,9) < 0 ist Man muss mindestens 16 Personen untersuchen.
4. Bei einem Würfelspiel kommt es vor allen Dingen auf die Anzahl der Sechsen an. a. Wie oft muss man würfeln, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% mindestens eine Sechs würfelt? b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man bei 10 Würfen höchstens 4 Sechsen? c. Bei Mensch-Ärgere-Dich-Nicht hat man in jeder Runde drei Versuche, um eine 6 zu würfeln und seine Spielfigur aus dem Haus zu ziehen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt die Figur 2 Runden im Häuschen?	a. $1-B_{n;\frac{1}{6}}(0) = 0{,}8 \Leftrightarrow 1-\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}8$ $\Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}8 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}2$ $\text{nSolve}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n=0.2,n\right)$ 8.82747 $\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = \ln(0{,}2)$ $\Leftrightarrow n\cdot\ln\left(\frac{5}{6}\right) = \ln(0{,}2) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0{,}2)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \Leftrightarrow n = 8{,}827$ Man muss ungefähr 9mal würfeln. b. $F_{10;\frac{1}{6}}(4) \approx 0{,}9845$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,45 % wirft man höchstens 4 Sechsen. c. $B_{6;\frac{1}{6}}(0) \approx 0{,}3349$ Die Wahrscheinlichkeit, 2 Runden im Häuschen zu bleiben, liegt bei 33,49%.
5. In einem Betrieb sind 80% der Mitarbeiter zufrieden mit den Arbeitsbedingungen. a. Wie viele Mitarbeiter müssen mindestens befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einer unzufrieden ist? b. Wie viele Mitarbeiter müssen mindestens befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens zwei unzufrieden sind?	a. X = Anzahl der unzufriedenen Mitarbeiter p = 0,2 $1-P(X=0)\ge 0{,}95 \Leftrightarrow 1-\binom{n}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^n \ge 0{,}95$ $\Leftrightarrow 1-0{,}8^n \ge 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}8^n \le 0{,}05 \Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) \le \ln(0{,}05)$ $\Leftrightarrow n\cdot\ln(0{,}8)\le\ln(0{,}05) \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}8)} \Leftrightarrow n \ge 13{,}43$ Man muss mindestens 14 Mitarbeiter befragen. b. $1-P(X=0)-P(X=1)\ge 0{,}95$ $\Leftrightarrow 1-\binom{n}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^n-\binom{n}{1}\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^{n-1}\ge 0{,}95$ $\Leftrightarrow 0{,}8^n - n\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{n-1} \le 0{,}05$ $\Leftrightarrow n \ge 21{,}78$ Man muss mindestens 22 Mitarbeiter fragen. Man rechnet mit dem TR die Ungleichung als Gleichung aus: $\text{nSolve}\left((0.8)^n+n\cdot 0.2\cdot(0.8)^{n-1}=0.05,n,0\right)$ 21.774