



EINFÜHRUNG DER E-FUNKTION

www.matheportal.wordpress.com

PROBLEMSTELLUNG

Gesucht ist eine exponentielle Funktion, deren Ableitung sich nicht verändert!

Also: Gesucht ist die Ableitung von $f(x) = a^x$, sodass gilt:

$$f'(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1!$$

ERSTELLUNG DER ABLEITUNG VON $f(x) = a^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} \end{aligned}$$

da a^x kein h enthält, kann man es vorziehen

Wenn man will, dass $f'(x) = a^x$ ist, so muss $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} = 1$ sein!

BERECHNUNG VON $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^h - 1}{h} \rightarrow 1 \text{ für } h \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow a^h - 1 \rightarrow h$$

$$\Leftrightarrow a^h \rightarrow h + 1$$

Nun setzt man $n = \frac{1}{h}$, d.h. $h = \frac{1}{n}$!

$$\Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{n} + 1 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\Leftrightarrow a \rightarrow \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \text{ für } n \rightarrow \infty$$

UNTERSUCHUNG VON $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Berechnung der Werte:

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,3703
4	2,4414
5	2,4883
6	2,5216
7	2,5216
8	2,5657
9	2,5811
10	2,5937
15	2,6328
20	2,6532
100	2,7048
150	2,7092
200	2,7115
500	2,7156
1000	2,7169
→	e

Man erkennt, dass sich der Grenzwert der Zahl 2,71.... nähert!

DIE EULER'SCHE ZAHL

Wenn man weiter rechnet, erhält man die Zahl $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = e$ mit:

$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995$
 $95749669676277240766303535475945713821785251664274$
 $27466391932003059921817413596629043572900334295260$
 $59563073813232862794349076323382988075319525101901..$

ZUSAMMENFASSUNG

$$f(x) = e^x \text{ mit } f'(x) = e^x$$

e ist eine unendliche Zahl mit $e \approx 2,7812$