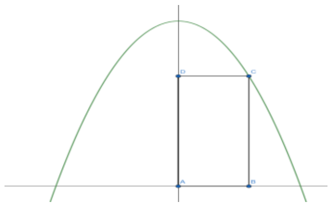
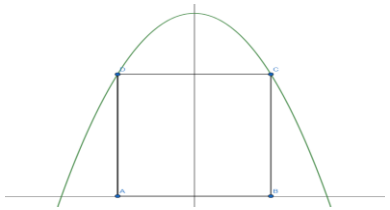
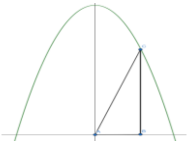
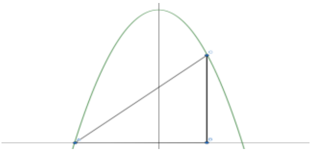
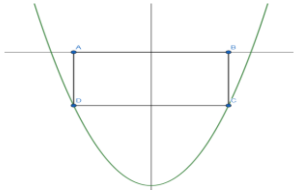
Lösungen zu den Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen 1: in Graphen eingeschriebene Figuren

Aufgabe	Lösung
1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^2 + 54$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein Rechteck ABCD eingeschrieben wird. Die Punkte A(0/0) und B(a/0) liegen auf der x-Achse, C auf dem Graphen und D auf der y-Achse. a. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat! b. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Umfang hat! 	a. Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 54 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{27} \approx \pm 5{,}196$, also $0 \leq a \leq 5{,}196$ $A(a) = a \cdot f(a) = a \cdot (-2a^2 + 54) = -2a^3 + 54a$ $A'(a) = -6a^2 + 54$ und $A''(a) = -12x$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 54 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -3$ (nicht relevant) $A''(3) = -36 < 0 \Rightarrow$ Maximum [Ränder sind nicht relevant, da es dann kein Rechteck gibt.] Für a = 3 ist der Flächeninhalt maximal. b. $U(a) = 2a + 2 \cdot f(a) = 2a + 2 \cdot (-2a^2 + 54) = 2a - 4a^2 + 54$ $U'(a) = 2 - 8a$ und $U''(a) = -8$ $U'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0{,}25$ $U''(a) = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximum Für a = 0,25 ist der Umfang maximal.
2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^4 + 80$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck ABCD eingeschrieben wird. Die Punkte A und B(a/0) liegen auf der x-Achse, C und D auf dem Graphen von f. a. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat! b. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Umfang hat! 	a. Nullstellen: $-x^4 + 80 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{80} \approx \pm 8{,}94$, also $0 \leq a \leq 8{,}94$ $A(a) = 2a \cdot f(a) = 2a \cdot (-a^4 + 80) = -2a^5 + 160a$ $A'(a) = -10a^4 + 160$ und $A''(a) = -40a^3$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -10a^4 + 160 = 0 \Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$ (nicht relevant) $A''(2) = -320 < 0 \Rightarrow$ Maximum [Ränder sind nicht relevant, da es dann kein Rechteck gibt.] Für a = 2 ist der Flächeninhalt maximal. b. $U(a) = 4a + 2 \cdot f(a) = 4a + 2 \cdot (-a^4 + 80) = 4a - 2a^4 + 160$ $U'(a) = 4 - 8a^3$ und $U''(a) = -24a^2$ $U'(a) = 0 \Leftrightarrow 4 - 8a^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 = 0{,}5 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}79$ $U''(0{,}79) = -18{,}96 < 0 \Rightarrow$ Maximum Für a = 0,79 ist der Umfang maximal.

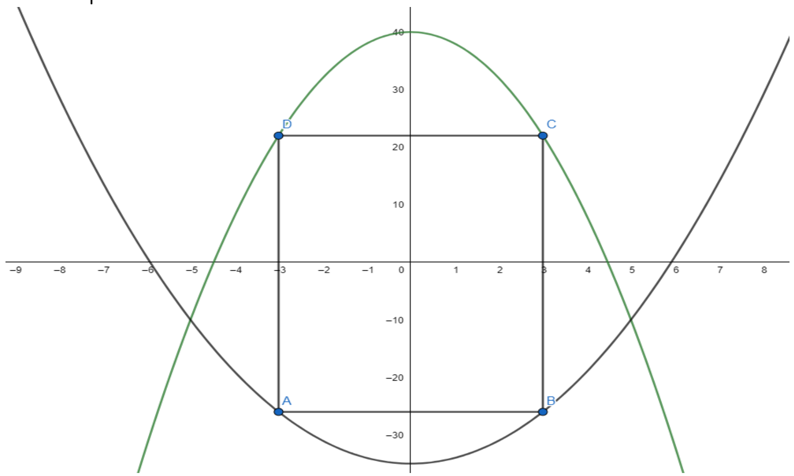
3. Gegeben ist die Funktion f(x) = $-6x^2 + 112{,}5$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein Dreieck ABC eingeschrieben wird. Die Punkte A und B(a/0) liegen auf der x-Achse, C liegt auf dem Graphen von f. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat! 	Nullstellen: $-6x^2 + 112{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{18{,}75} \approx \pm 4{,}33$, also $0 \leq a \leq 4{,}33$ $A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (-6a^2 + 112{,}5) = -3a^3 + 56{,}25a$ $A'(a) = -9a^2 + 56{,}25$ und $A''(a) = -18a$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -9a^2 + 56{,}25 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 6{,}25 \Leftrightarrow a = 2{,}5 \vee a = -2{,}5$ (nicht relevant) $A''(2{,}5) = -45 < 0 \Rightarrow$ Maximum [Ränder sind nicht relevant, da es dann kein Dreieck gibt.] Für a = 2,5 ist der Flächeninhalt maximal.
4. Gegeben ist die Funktion f(x) = $-4x^2 + 144$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein Dreieck ABC eingeschrieben wird. Die Punkte A und B liegen auf der x-Achse, A auf dem Schnittpunkt von f mit der x-Achse, C liegt auf dem Graphen von f. Berechnen Sie, für welchen Wert das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat! 	Nullstellen: $-4x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{36} \approx \pm 6$, also $0 \leq a \leq 6$ $A(a) = \frac{1}{2} \cdot (a + 6) \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot (a + 6) \cdot (-4a^2 + 144) = -2a^3 + 72a - 12a^2 + 432$ $A'(a) = -6a^2 + 72 - 24a$ und $A''(a) = -12a - 24$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 72 - 24a = 0 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -6$ (nicht relevant) $A''(2) = -48 < 0 \Rightarrow$ Maximum [Ränder sind nicht relevant, da es dann kein Dreieck gibt.] Für a = 2 ist der Flächeninhalt maximal.
5. Gegeben ist die Funktion f(x) = $x^2 - 15$. f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche, der ein Rechteck ABCD eingeschrieben wird. Die Punkte A(−a/0) und B(a/0) liegen auf der x-Achse, C(a/f(a)) und D(−a/f(−a)) auf dem Graphen von f. a. Fertigen Sie eine Skizze an! b. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat! c. Berechnen Sie, für welchen Wert von a das Rechteck einen maximalen Umfang hat! 	a. s. links b. Nullstellen: $x^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15} \approx \pm 3{,}87$, also $0 \leq a \leq 3{,}87$ $A(a) = 2a \cdot (-f(a)) = 2a \cdot (-a^2 + 15) = -2a^3 + 30a$ $A'(a) = -6a^2 + 30$ und $A''(a) = -12a$ $A'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 5 \Leftrightarrow a = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \vee a = -\sqrt{5}$ (nicht relevant) $A''(2{,}24) = -26{,}88 < 0 \Rightarrow$ Maximum Für a = 2,24 ist der Flächeninhalt maximal. c. $U(a) = 4a + 2 \cdot (-f(a)) = 4a + 2 \cdot (-a^2 + 15) = 4a - 2a^2 + 30$ $U'(a) = 4 - 4a^2$ und $U''(a) = -8a$ $U'(a) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1$ (nicht relevant) $U''(1) = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximum Für a = 1 ist der Umfang maximal.

6. Gegeben sind die Funktion $f(x) = -2x^2 + 40$ und $g(x) = x^2 - 35$. f und g begrenzen eine Fläche, in die ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck eingeschrieben werden soll. Dabei soll eine Einheit auf der x- und y-Achse jeweils 1cm sein.

a. Berechnen Sie alle für die Aufgabe relevanten Punkte und fertigen Sie damit eine Skizze an!

b. Berechnen Sie, für welchen Wert das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat und berechnen Sie die Größe der Fläche!

a. Schnittpunkte: $-2x^2 + 40 = x^2 - 35 \Leftrightarrow -3x^2 = -75 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5 \lor x = -5$



b. $A(a) = 2a \cdot [g(a)+(-f(a))] = 2a \cdot [-2a^2 + 40 - (a^2 - 35)]$

$= 2a \cdot [-2a^2 + 40 - a^2 + 35] = 2a \cdot [-3a^2 + 75] = -6a^3 + 150a$

$A'(a) = -18a^2 + 150$ und $A''(a) = -36a$

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -18a^2 + 150 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 8{,}\overline{3} \Leftrightarrow a \approx 2{,}89 \lor a = -\sqrt{8{,}\overline{3}}$ (nicht relevant)

$A''(2{,}89) \approx -104{,}04 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$A(2{,}89) = 288{,}675$

Für a = 2,89 ist der Flächeninhalt mit 288,675 cm^2 maximal.