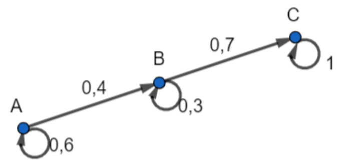
Lösungen zu den Übungen zu stochastischen Matrizen 3: absorbierende Zustände

1. Ein Prozessdiagramm gibt den Wechsel eines Systems von pro Stunde an. Am Anfang des Systems befinden sich alle im System A.



a. Berechnen Sie die Verteilung nach 5 Stunden!

b. Bestimmen Sie ohne Taschenrechner die langfristige Verteilung!

c. Wie lange dauert es, bis der Anteil von C zum ersten Mal größer als 50% wird?

d. Wie lange dauert es, bis der Anteil von A zum ersten Mal kleiner als 10% wird?

a.

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.07776 \\ 0.10044 \\ 0.8218 \end{bmatrix}$$

b. Da C ein absorbierender Zustand ist, ist die Grenzverteilung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c.

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.36 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \begin{bmatrix} 0.216 \\ 0.252 \\ 0.532 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}^{2.855} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.232606 \\ 0.267275 \\ 0.500118 \end{bmatrix}$$

d.

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.07776 \\ 0.10044 \\ 0.8218 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}^{4.5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.100388 \\ 0.127935 \\ 0.771677 \end{bmatrix}$$

a. Nach 5 Stunden befinden sich ca. 0,78% im System A, 10,04% in Zustand B und 82,18% im Zustand C.

b. Alles in Zustand C;

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c. Nach ca. 3 Stunden sind mehr als 50% im Zustand C. (Genauer: Nach ca. 2,855 Stunden.)

d. Nach ca. 4,5 Stunden sind weniger als 10% im System A.

2. Ein Spielfeld besteht aus den Feldern A bis E. Die Spielfigur steht auf dem Feld B. Es wird gewürfelt. Wenn eine 1 oder 2 gewürfelt wird, geht die Spielfigur um eins nach rechts. Wenn eine 3 gewürfelt wird, rückt sie um eins nach links. Bei den anderen Zahlen bleibt die Figur stehen. Das Spiel endet, wenn die Figur auf A oder E steht. Ein Spieler hat gewonnen, wenn er A erreicht, und verloren, wenn er E erreicht.

a. Bestimmen Sie die entsprechende Übergangsmatrix!

b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man nach höchstens vier Würfen gewinnt!

c. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man mit dem 5. Wurf verliert!

d. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeit, auf lange Sicht zu gewinnen mit der, auf lange Zeit zu verlieren!

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0.5 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

b.

$$m^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.335648 \\ 0.152006 \\ 0.240741 \\ 0.179012 \\ 0.092593 \end{bmatrix}$$

c.

$$m^5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.360983 \\ 0.116127 \\ 0.200874 \\ 0.169753 \\ 0.152263 \end{bmatrix}$$

0,1523
-0,0926
0,0597

d.

$$m^{500} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.466667 \\ 6.41678\text{E-}41 \\ 1{,}28336\text{E-}40 \\ 1.28336\text{E-}40 \\ 0.533333 \end{bmatrix}$$

$$m^{501} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0.466667 \\ 5.34731\text{E-}41 \\ 1.06946\text{E-}40 \\ 1.06946\text{E-}40 \\ 0.533333 \end{bmatrix}$$

a. M =

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0.5 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen beträgt ca. 33,56%.

c. Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 5,97%.

d. Auf lange Sicht ist die Wahrscheinlichkeit des Verlustes größer, da man mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 46,67% gewinnt und mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 53,33% verliert.