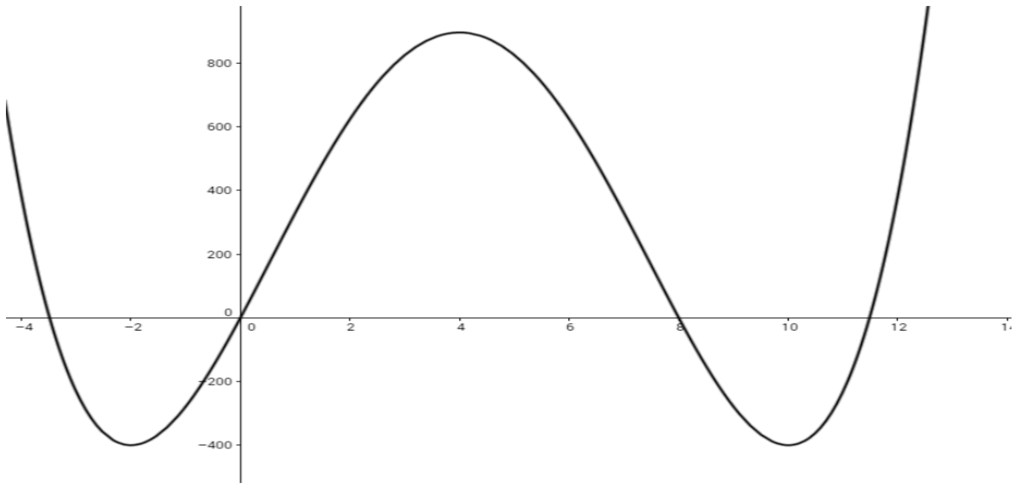
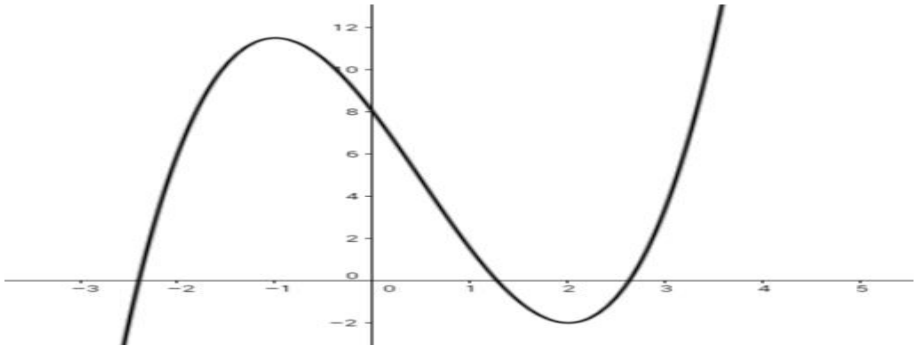
Lösungen zu Aufgaben zur Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen:

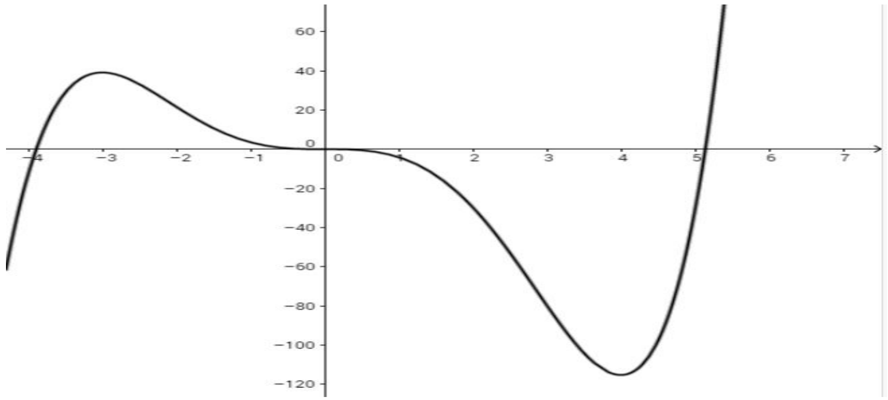
1. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
f(x) = $x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 320x$		
Nullstellen	$x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 320x = 0$ $x \cdot (x^3 - 16x^2 + 24x + 320) = 0$ $x = 0 \vee 4x^3 - 16x^2 + 24x + 320 = 0$ $x = 0 \vee x \approx -3{,}48 \vee x = 8 \vee x \approx 11{,}48$ (TR oder Poynomdivision)	x = 0 $x \approx -3{,}48$ x = 8 $x \approx 11{,}48$
Schnittpunkt mit der y-Achse	f(0) = 0	S_y (0/0)
Symmetrie	$f(-x) = x^4 + 16x^3 + 24x^2 - 320x \neq f(x)$, also keine Achsensymmetrie $f(-x) = x^4 + 16x^3 + 24x^2 - 320x \neq -f(x) = -x^4 + 16x^3 - 24x^2 - 320x$, also keine Punktsymmetrie **oder** keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie

Extrema	$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320$ $f''(x) = 12x^2 - 96x + 48$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 12x + 80 = 0$ $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4 \vee x = 10$ (TR oder Polynomdivision) $f''(-2) = 288$, d.h. Minimum $f(-2) = -400$ $f''(4) = -144$, d.h. Maximum $f(4) = 896$ $f''(10) = 288$, d.h. Minimum $f(10) = -400$	Minimum $(-2/-400)$ Maximum $(4/896)$ Minimum $(10/-400)$
Wendepunkte	$f''(x) = 12x^2 - 96x + 48$ $f'''(x) = 24x - 96$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 96x + 48 = 0$ $\Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{12}\,(\approx 7{,}46) \vee x = 4 - \sqrt{12}\,(\approx 0{,}54)$ $f'''(7{,}46) \approx 83{,}14$, d.h. Wendepunkt und minimaler Steigung $f(7{,}46) \approx 177{,}36$ $f'''(0{,}54) \approx -83{,}14$, d.h. Wendepunkt und maximaler Steigung $f(0{,}54) \approx 177{,}36$	$W_1\,(\approx 7{,}46/\approx 177{,}36)$ $W_2\,(\approx 0{,}54/\approx 177{,}36)$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, denn es handelt sich um eine Funktion vierten Grades, die vor x^4 eine positive Zahl (nämlich 1) hat.	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Monotonie	$f'(x) = 4x^3 - 48x^2 + 48x + 320 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4 \vee x = 10$ $x < -2$: $f'(-3) = -364 < 0$ => streng monoton fallend $x \in [-2; 4]$: $f'(0) = 320 > 0$ => streng monoton steigend $x \in [4; 10]$: $f'(5) = -140 < 0$ => streng monoton fallend $x > 10$: $f'(12) = 896$ => streng monoton steigend	f ist streng monoton steigend für $x \epsilon [-2; 4]$ und $x > 10$ f ist streng monoton fallend für $x \epsilon [4; 10]$ und $x < -2$

Krümmungsverhalten	$f''(x) = 12x^2 - 96x + 48 = 0 \Leftrightarrow x \approx 7{,}46$ v $x \approx 0{,}54$ $x < 0{,}54$: $f''(0) = 48$ => linksgekrümmt $x \in [0{,}54\,, 7{,}46]$: $f''(4) = -144$ => rechtsgekrümmt $x > 7{,}46$: $f''(8) = 48$ => linksgekrümmt	f ist rechtsgekrümmt für $x \in [0{,}54\,;\ 7{,}46]$, ansonsten linksgekrümmt.

2. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 8$		
Nullstellen Achsenschnittpunkt mit der y-Achse	$x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 8 = 0$ $x \approx -2{,}4$v $x \approx 1{,}27$ v $x \approx 2{,}62$ (mit TR) $f(0) = 8$	$x \approx -2{,}4$ v $x \approx 1{,}27$ v $x \approx 2{,}62$ $S_y(0/8)$
Symmetrie	$f(-x) = -x^3 - 1{,}5x^2 + 6x + 8 \neq f(x)$, also keine Achsensymmetrie $f(-x) = -x^3 - 1{,}5x^2 + 6x + 8 \neq -f(x) = -x^3 + 1{,}5x^2 + 6x - 8$, also keine Punktsymmetrie **oder** keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie

Extrema	$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ $f''(x) = 6x - 3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$ (TR oder p-q-Formel) $f''(2) = 9$, d.h. Minimum $f(2) = -2$ $f''(-1) = -9$, d.h. Maximum $f(-1) = 11{,}5$	Minimum (2/−2) Maximum (−1/11,5)
Wendepunkte	$f''(x) = 6x - 3$ $f'''(x) = 6$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$ $f'''(0{,}5) = 6 > 0$, d.h. Wendepunkt und minimale Steigung $f(0{,}5) = 4{,}75$	W(0,5/4,75)
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, denn es handelt sich um eine Funktion dritten Grades, die vor x^3 eine positive Zahl (nämlich 1) hat.	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Monotonie	$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$ $x < -1$: $f'(-2) = 12 > 0$ => streng monoton steigend $x \in [-1; 2]$, $f'(0) = -6 < 0$ => streng monoton fallend $x > 2$: $f'(3) = 12 > 0$ => streng monoton steigend	f ist im Intervall $[-1; 2]$ streng monoton fallend, ansonsten streng monoton steigend
Krümmungsverhalten	$f''(x) = 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$ $x < 0{,}5$: $f''(0) = -3$ => rechtsgekrümmt $x > 0{,}5$: $f''(3) = 15$ => linksgekrümmt	f ist rechtsgekrümmt für $x < 0{,}5$ und linksgekrümmt für $x > 0{,}5$

3. Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
$f(x) = 0{,}2x^5 - 0{,}25x^4 - 4x^3$		
Nullstellen Achsenschnittpunkt mit der y-Achse	$0{,}2x^5 - 0{,}25x^4 - 4x^3 = 0$ $x^3 \cdot (0{,}2x^2 - 0{,}25x - 4) = 0$ (p-q-Formel oder TR) $x = 0 \lor x \approx -3{,}89 \lor x \approx 5{,}14$ $f(0) = 0$	$x = 0 \lor x \approx -3{,}89$ $\lor x \approx 5{,}14$ $S_y(0/0)$
Symmetrie	$f(-x) = -0{,}2x^5 - 0{,}25x^4 + 4x^3 \neq f(x) = +0{,}2x^5 - 0{,}25x^4 - 4x^3$, also keine Achsensymmetrie $f(-x) = -0{,}2x^5 - 0{,}25x^4 + 4x^3 \neq -f(x) = -0{,}2x^5 + 0{,}25x^4 - 4x^3$, also keine Punktsymmetrie **oder** keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen	keine Symmetrie
Extrema	$f'(x) = x^4 - x^3 - 12x^2$ $f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 24x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - 12x^2 = \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -3 \lor x = 4$ $f''(3) = -63$, d.h. Maximum $f''(0) = 0$ Sonderfall!	Minimum $(4/-115{,}2)$ Maximum $(-3/39{,}15)$

	$f''(4) = 112$, d.h. Minimum Untersuchung auf VZW bei f': $f'(-1) = -10$ und $f'(1) = -12$ $f(-3) = 39{,}15$ $f(4) = -115{,}2$ d.h. kein VZW, also kein Extrema	
Wendepunkte	$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 24x$ $f'''(x) = 12x^2 - 6x - 24$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x \approx -2{,}1 \vee x \approx 2{,}85$ $f'''(0) = -24 < 0$, d.h. Wendepunkt und maximale Steigung $f(0) = 0$ $f'''(-2{,}1) \approx 41{,}25 > 0$, d.h. Wendepunkt mit minimaler Steigung $f(-2{,}1) \approx 24{,}01$ $f'''(2{,}85) \approx 56{,}37 > 0$, d.h. Wendepunkt mit minimaler Steigung $f(2{,}85) \approx -71{,}48$	$W_1(0/0)$ $W_2(-2{,}1/24{,}01)$ $W_3(2{,}85/-71{,}48)$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Monotonie	$f'(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 4$ $x < -3$: $f'(-4) = 128 > 0$ => f ist streng monoton steigend $x \in [-3; 0]$: $f'(-1) = -10 < 0$ => f ist streng monoton fallend $x \in [0; 4]$: $f'(1) = -12 < 0$ => f ist streng monoton fallend $x > 4$: $f'(5) = 200 > 0$ => f ist streng monoton steigend	f ist streng monoton steigend für $x < -3$ und für $x > 4$ f ist streng monoton fallend im Intervall $[-3; 0]$ und im Intervall $[0; 4]$
Krümmungsverhalten	$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x \approx -2{,}1 \vee x \approx 2{,}85$ $x < -2{,}1$: $f''(-3) = -63$ => f ist rechtsgekrümmt $x \in [-2{,}1; 0]$: $f''(-1) = 17$ => f ist linksgekrümmt $x \in [0; 2{,}85]$: $f''(2) = -28$ => f ist rechtsgekrümmt $x > 2{,}85$: $f''(3) = 9$=> f ist linksgekrümmt	f ist rechtsgekrümmt für $x < -2{,}1$ und $x \in [0; 3{,}37]$ f ist linksgekrümmt für $x \in [-2{,}1; 0]$ und $x > 2{,}85$