

Lösungen zu den Übungen zu Wendepunkten

Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
<p>1. Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion und untersuchen Sie, ob es sich um eine maximale oder minimale Steigung handelt!</p> <p>a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$</p>	$f'(x) = x^2 - 2x$ $f''(x) = 2x - 2$ $f'''(x) = 2$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f'''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $f(1) = -\frac{2}{3}$	<p>$W_1(-\frac{2}{3})$ minimale Steigung</p>
<p>b. $f(x) = 2x^4 + 8x^3 - 96x^2 + 36x + 72$</p>	$f'(x) = 8x^3 + 24x^2 - 192x + 36$ $f''(x) = 24x^2 + 48x - 192$ $f'''(x) = 48x + 48$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x^2 + 48x - 192 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$ $f'''(-4) = -144 < 0 \Rightarrow$ WP mit maximaler Steigung $f(-4) = -1608$ $f'''(2) = 48 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $f(2) = -144$	<p>$W_1(-4/-1608)$ maximale Steigung</p> <p>$W_2(2/-144)$ minimale Steigung</p>
<p>c. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x$</p>	$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ $f''(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ $f'''(x) = 12x^2 - 24x + 8$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$ $f'''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $f(0) = 0$ $f'''(1) = -4 < 0 \Rightarrow$ WP mit maximaler Steigung $f(1) = \frac{38}{15}$ $f'''(2) = 8 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $f(2) = \frac{76}{15}$ [Vergleich an der Stelle $x = 2$ und $x = 0$: $f'(0) = 2$ und $f'(2) = 2$ \Rightarrow in beiden WP ist die Steigung mit 2 lokal und absolut minimal]	<p>$W_1(0/0)$ minimale Steigung</p> <p>$W_2(1/\frac{38}{15})$ maximale Steigung</p> <p>$W_3(2/\frac{76}{15})$ minimale Steigung</p>

<p>d. $f(x) = x^6 - 240x^2$</p>	<p>$f'(x) = 6x^5 - 480x$ $f''(x) = 30x^4 - 480$ $f'''(x) = 120x^3$</p> <p>$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 30x^4 - 480 = 0 \Leftrightarrow 30x^4 = 480 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$</p> <p>$f'''(2) = 1440 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $f(2) = -896$ $f'''(-2) = -1440 < 0 \Rightarrow$ WP mit maximaler Steigung $f(-2) = -896$</p>	<p>$W_1(-2/-896)$ maximale Steigung</p> <p>$W_2(2/-896)$ minimale Steigung</p>
<p>e. $f(x) = 4x^4 - 16x^3 - 360x^2 + 96x + 10$</p>	<p>$f'(x) = 16x^3 - 48x^2 - 720x + 96$ $f''(x) = 48x^2 - 96x - 720$ $f'''(x) = 96x - 96$</p> <p>$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 48x^2 - 96x - 720 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5$</p> <p>$f'''(-3) = -384 < 0 \Rightarrow$ WP mit maximaler Steigung $f(-3) = -2762$ $f'''(5) = 384 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $f(5) = -8010$</p>	<p>$W_1(-3/-2762)$ maximale Steigung</p> <p>$W_2(5/-8010)$ minimale Steigung</p>
<p>f. $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$</p>	<p>$f'(x) = 18x - 12$ $f''(x) = 18$</p> <p>$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 18 = 0$ geht nicht \Rightarrow kein Wendepunkt</p>	<p>kein Wendepunkt</p>
<p>2. Bestimmen Sie die Wendepunkte! a. $f(x) = 3x^5 - 5x^4$</p>	<p>$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$ $f''(x) = 60x^3 - 60x^2$ $f'''(x) = 180x^2 - 120x$</p> <p>$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$</p> <p>$f'''(1) = 60 \neq 0 \Rightarrow$ WP $f(1) = -2$</p> <p>$f'''(0) = 0$ Untersuchung auf VZW bei $f''(x)$: $f''(-1) = -120$ $f''(0,5) = -7,5$ \Rightarrow kein VZW \Rightarrow kein Wendepunkt</p>	<p>$W(1/-2)$</p>

<p>b. $f(x) = 10x^7 - 21x^5 + 20x$</p>	$f'(x) = 70x^6 - 105x^4 + 20 \quad f''(x) = 420x^5 - 420x^3 \quad f'''(x) = 2100x^4 - 1260x^2$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 420x^5 - 420x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$ $f'''(-1) = 840 \neq 0 \Rightarrow \text{WP} \quad f(-1) = -9$ $f'''(1) = 840 \neq 0 \Rightarrow \text{WP} \quad f(1) = 9$ $f'''(0) = 0$ <p>Untersuchung auf VZW bei $f''(x)$:</p> $f''(-0,5) = 39,375 \quad f''(0,5) = -39,375 \Rightarrow \text{VZW} \Rightarrow \text{Wendepunkt} \quad f(0) = 0$	$W_1(-1/-9)$ $W_2(1/9)$ $W_3(0/0)$
<p>c. $f(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 12x^2 + 10$</p>	$f'(x) = 0,25x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 10x^2 + 24x \quad f''(x) = x^3 + 2x^2 - 20x + 24 \quad f'''(x) = 3x^2 + 4x - 20$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 20x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -6$ $f'''(-6) = 64 \neq 0 \Rightarrow \text{WP} \quad f(-6) = 989,2$ $f'''(2) = 0$ <p>Untersuchung auf VZW bei $f''(x)$:</p> $f''(0) = 24 \quad f''(3) = 9 \Rightarrow \text{kein VZW} \Rightarrow \text{kein Wendepunkt}$	$W(-6/989,2)$
<p>3. In einem Stausee wird bei Hochwasser Wasser gespeichert. Der Zufluss des Wassers kann durch die Funktion</p> $f(x) = -\frac{1}{60}x^3 + 0,5x^2 - 4x + 15$ <p>dargestellt werden, x in Sekunden mit $0 < x < 20$ und $f(x)$ in $10\text{m}^3/\text{sec}$. Wann steigt der Zufluss am schnellsten an? Wie viel m^3 fließen zu diesem Zeitpunkt dazu?</p>	$f'(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x - 4$ $f''(x) = -\frac{1}{10}x + 1$ $f'''(x) = -\frac{1}{10}$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{10}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ $f'''(10) = -\frac{1}{10} < 0 \Rightarrow \text{maximale Steigung}$ $f(10) = 8,3$	<p>Nach 10 Sekunden steigt der Zufluss mit $83,33 \text{ m}^3$ am schnellsten an.</p>