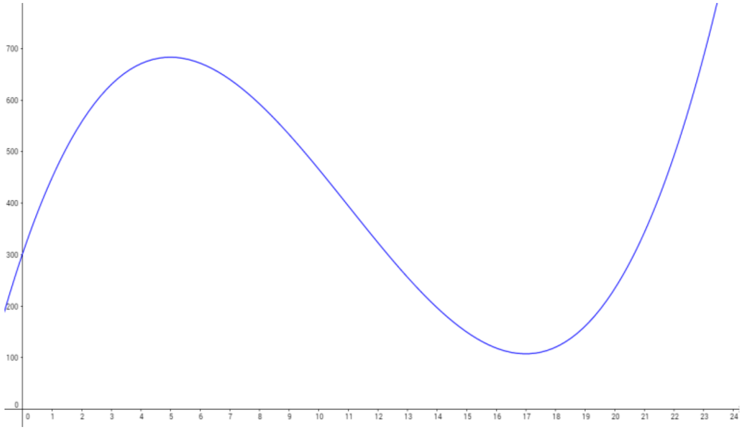
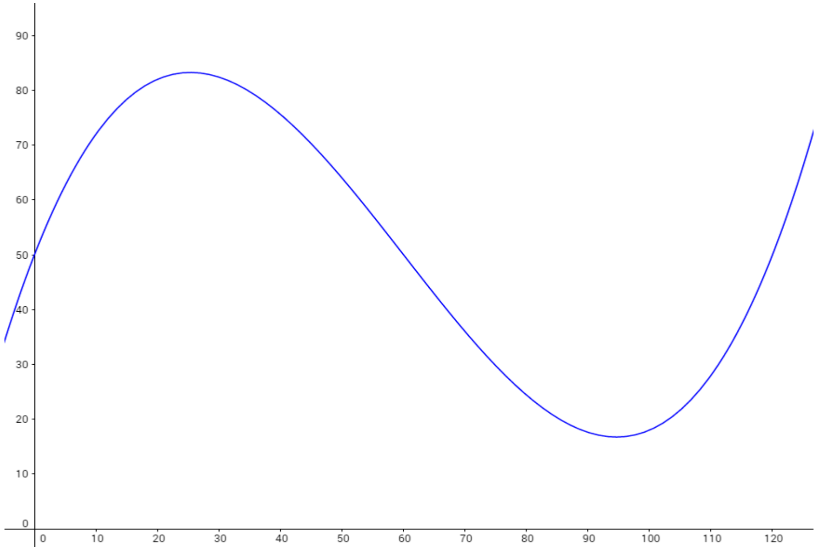
Lösungen zu den Textaufgaben mit Ableitungen und Integralen

Aufgabe	Rechnung	Lösung
1. In einen Stausee fließt Wasser aus einem kleinen Fluss. Die momentane Zuflussrate an einem Tag kann an einem Tag durch die Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 22x^2 + 170x + 300$ modelliert werden, x in Stunden mit $0 \leq x \leq 24$, f(x) in m³/h.  a. Wann fließen 500m³/h Wasser in den Stausee? b. Berechnen Sie, wann die Zuflussrate am geringsten ist! c. Berechnen Sie, wann sich die Zuflussrate am stärksten ändert! d. Berechnen Sie, wie viel m³ Wasser in den ersten 6 Stunden in den Stausee geflossen sind!	a. $\frac{2}{3}x^3 - 22x^2 + 170x + 300 = 500$ $\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^3 - 22x^2 + 170x - 200 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 1{,}43 \vee x \approx 9{,}52 \vee x \approx 22{,}05$ b. Gesucht: Minimum $f'(x) = 2x^2 - 44x + 170$ $f''(x) = 4x - 44$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 44x + 170 = 0$ $\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 17$ $f''(5) = -24 < 0$ => Maximum $f''(17) = 24 > 0$ => Minimum $f(17) = 107{,}\overline{3}$ [Ränder: $f(0) = 300 > f(17)$, $f(24) = 924 > f(17)$] c. Gesucht: Wendepunkte $f''(x) = 4x - 44$ $\quad$ $f'''(x) = 4$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 11$ $f'''(11) = 4 > 0$ => minimale Steigung $f'(11) = -72$ [Ränder: $f'(0) = 170 > f'(11)$, $f'(24) = 266 > f'(11)$] d. $\int_0^6 f(x)dx$ $= \left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{22}{3}x^3 + 85x^2 + 300x\right]_0^6 = 3492$	Nach 1,43 und 9,52 Stunden beträgt die momentane Zuflussrate 500m³/h. Die Zuflussrate ist nach 17 Stunden am geringsten. Die Zuflussrate fällt nach 11 Stunden am meisten; sie steigt nach 24 Stunden am stärksten an. In den ersten 6 Stunden fließen insgesamt 3492m³ Wasser in den Stausee.

2. Die Funktion f(x) = $0{,}0004x^3 - 0{,}072x^2 + 2{,}88x + 50$ modelliert die momentane Geschwindigkeit eines Autos, x in Sekunden mit $0 \leq x \leq 120$, f(x) in km/h.



a. Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Autofahrer am schnellsten fährt!
b. Bestimmen Sie die zurückgelegte Strecke nach 40 Sekunden!
c. Geben Sie eine Funktion an, mit der sich gesamte zurückgelegte Strecke zum Zeitpunkt a berechnen lässt!
d. Berechnen Sie, wann der Autofahrer seine Geschwindigkeit am stärksten verringert!

a. Gesucht: Maximum
$f'(x) = 0{,}0012x^2 - 0{,}144x + 2{,}88$
$f''(x) = 0{,}0024x - 0{,}144$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}0012x^2 - 0{,}144x + 2{,}88 = 0$
$\Leftrightarrow x \approx 25{,}36 \lor x \approx 94{,}64$
$f''(25{,}36) \approx -0{,}083 < 0$ => Maximum
$f''(94{,}64) \approx 0{,}083 > 0$ => Minimum
$f(25{,}36) \approx 83{,}25$
[Ränder: f(0) = 50, f(120) = 50]

Nach 25,36 Sekunden fährt der Autofahrer am schnellsten.

b. Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 40 Sekunden: $\frac{1}{40} \cdot \int_0^{40} f(x)dx$
$= \frac{1}{40} \cdot [0{,}0001x^4 - 0{,}024x^3 + 1{,}44x^2 + 50x]_0^{40}$
$= \frac{1}{40} \cdot 30042 = 75{,}8$ km/h
75,8km/h · 40sec = 75,8km/h · $\frac{40}{3600}$h = 0,84 km

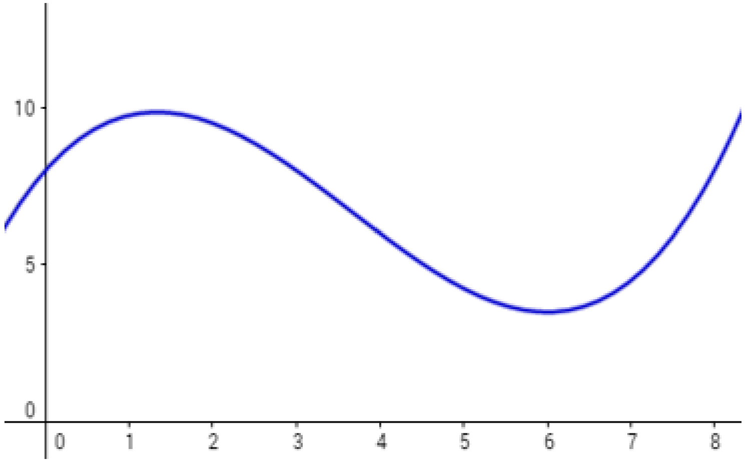
Nach 40 Sekunden hat er 0,84 km zurückgelegt.

c. $g(a) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x)dx \cdot \frac{a}{3600} = \frac{1}{3600} \cdot \int_0^a f(x)dx$

$g(a) = \frac{1}{3600} \cdot \int_0^a f(x)dx$

d. Gesucht: Wendepunkt mit minimaler Steigung
$f''(x) = 0{,}0024x - 0{,}144$
$f'''(x) = 0{,}0024$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 60$
$f'''(60) = 0{,}0024 > 0$ => minimale Steigung
$f'(60) = -1{,}44$
[Ränder: f'(0) = 2,88, f'(120) = 2,88]

Nach 60 Sekunden verringert sich die Geschwindigkeit am stärksten.

3. Der momentane Treibstoffverbrauch kann durch die Funktion $f(x) = 0{,}125x^3 - 1{,}375x^2 + 3x + 8$ modelliert werden, x in gefahrenen 100km mit $0 \leq x \leq 8{,}5$, f(x) in l/100km. Zu Beginn der Fahrt sind 60l Diesel im Tank.  a. Wann verbraucht das Auto 9l/100km? b. Berechnen Sie, wann am meisten und am wenigsten Treibstoff verbraucht werden! c. Berechnen Sie, wann der Kraftstoffverbrauch am stärksten sinkt! d. Bestimmen Sie, wie viel l Diesel nach 300 gefahrenen Kilometern Stunden noch im Tank ist! e. f(x) gebe auch nach 850km den momentanen Kraftstoffverbrauch an. Berechnen Sie, wann der Tank leer ist!	a. $0{,}125x^3 - 1{,}375x^2 + 3x + 8 = 9$ $\Leftrightarrow 0{,}125x^3 - 1{,}375x^2 + 3x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 0{,}41 \lor x \approx 2{,}41 \lor x \approx 8{,}19$ b. $f'(x) = 0{,}375x^2 - 2{,}75x + 3$ $f''(x) = 0{,}75x - 2{,}75$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1{,}33 \lor x \approx 6$ $f''(1{,}33) = -1{,}75 < 0$ => Maximum $f''(6) = 1{,}75 > 0$ => Minimum $f(1{,}33) \approx 9{,}85$ $f(6) = 3{,}5$ [Ränder: $f(0) = 8$, $f(8{,}5) = 10{,}92$] c. $f''(x) = 0{,}75x - 2{,}75$ $f'''(x) = 0{,}75$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 3{,}67$ $f'''(3{,}67) = 0{,}75 > 0$ => minimale Steigung $f'(3{,}67) \approx -2{,}04$ [Ränder: $f'(0) = 3$, $f'(8{,}5) \approx 6{,}72$] d. $\int_0^3 f(x)dx$ $=[0{,}03125x^4 - 0{,}458\overline{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 8x]_0^3$ $= 27{,}6563$ $60 - 27{,}6563 = 32{,}3438$ e. $\int_0^a f(x)dx = 60$ $\Leftrightarrow 0{,}03125a^4 - 0{,}458\overline{3}a^3 + 1{,}5a^2 + 8a = 60$ $\Leftrightarrow 0{,}03125a^4 - 0{,}458\overline{3}a^3 + 1{,}5a^2 + 8a - 60 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx -4{,}73 \lor x \approx 8{,}67$	Nach 41, 241 und 819km verbraucht das Auto 9l/100km. Nach 600km wird am wenigsten Treibstoff verbraucht, nach 850 km am meisten. Der Kraftstoffverbrauch sinkt nach 367km am meisten. Nach 300km sind noch 32,34l im Tank. Nach ca. 867 km ist der Tank leer.