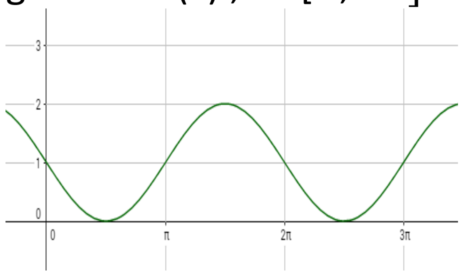
Lösungen zu den Übungen zu Maximum und Minimum: Sonderfälle und besondere Funktionen

Aufgabe 1	Lösung	Ergebnis
a. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$	$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6$ $f''(x) = 12x - 12$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f''(1) = 0$ Untersuchung auf VZW bei f‘: $f'(0) = 6$ und $f'(2) = 6$, d.h. kein VZW	kein Maximum und Minimum
b. $f(x) = x^7 + 3$	$f'(x) = 7x^6$ $f''(x) = 42x^5$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f''(0) = 0$ Untersuchung auf VZW bei f‘: $f'(-1) = 7$ und $f'(1) = 7$, d.h. kein VZW	kein Maximum und Minimum
c. $f(x) = \sqrt{6}\,x - 3x^2$	$f'(x) = \sqrt{6} - 6x$ $f''(x) = -6$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $f''(\frac{1}{\sqrt{6}}) = -6 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\quad f(\frac{1}{\sqrt{6}}) = 0{,}5$	Maximum $H(\frac{1}{\sqrt{6}}/0{,}5)$

d. $f(x) = x^4 + 12$	$f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f''(0) = 0$ Untersuchung auf VZW bei f': $f'(-1) = -4$ und $f'(1) = 4$, d.h. VZW von – nach + => Minimum $f(0) = 12$	Minimum T(0/12)
e. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 60x^2 + 96x$	$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 120x + 96$ $f''(x) = 36x^2 + 24x - 120$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 12x^2 - 120x + 96 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2$ $f''(-4) = 360 > 0$ => Minimum $f(-4) = -832$ $f''(1) = -60 < 0$ => Maximum $f(1) = 43$ $f''(2) = 72 > 0$ => Minimum $f(2) = 32$	Minima $T_1(-4/-832)$ und $T_2(2/32)$ Maximum H(1/43)
f. $f(x) = 0{,}6x^5 + 3{,}75x^4 + 8x^3 + 6x^2$	$f'(x) = 3x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 12x$ $f''(x) = 12x^3 + 45x^2 + 48x + 12$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 15x^3 + 24x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \vee x = 0$ $f''(-2) = 0$ Untersuchung auf VZW bei f': $f'(-3) = 18$und $f'(-1{,}5) = 0{,}5625$, d.h. kein VZ W $f''(-1) = -3$ => Maximum $f(-1) = 0{,}65$ $f''(0) = 12 > 0$ => Minimum $f(0) = 0$	Minimum T(0/0) Maximum H(−1/0,65)

g. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 42x^2 + 48x + 24$	$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 84x + 48$ $f''(x) = 36x^2 + 48x - 84$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 24x^2 - 48x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$ (doppelte Nullstelle) $f''(-4) = 300 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f''(1) = 0$ Sonderfall; Untersuchung auf VZW bei $l'(x)$: $f'(0) = 48$ und $l'(2) = 72$, d.h. kein VZW, kein Extremum $f(-4) = -584$	Minimum $(-4/-584)$

Aufgabe 2	Rechnung	Lösung
a. $f(x) = x \cdot (1 + x^2)^{-1}$	$f'(x) = 1 \cdot (1 + x^2)^{-1} + x \cdot (-1) \cdot 2x \cdot (1 + x^2)^{-2}$ $= \frac{1}{(1+x^2)^1} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x^2)^1} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 / \cdot (1+x^2)^2$ $\Leftrightarrow (1+x^2) - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$ Untersuchung auf VZW bei f': $f'(-2) = -\frac{3}{25}$ und $f'(0) = 1$, d.h. VZW von – nach + => Minimum $f(-1) = -0{,}5$ $f'(0) = 1$ und $f'(2) = -\frac{3}{25}$ d.h. VZW von + nach – => Maximum $f(1) = 0{,}5$	Minimum $T(-1/-0{,}5)$ Maximum $H(1/0{,}5)$
b. $f(x) = (x-2)^3$	$f'(x) = 3 \cdot (x-2)^2$ $f''(x) = 6 \cdot (x-2)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $f''(2) = 0$ Untersuchung auf VZW bei f': $f'(1) = 3$ und $f'(3) = 3$, d.h. kein VZW	kein Maximum und Minimum
c. $f(x) = x^2 \cdot \ln(x);\ x > 0$	$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$ $f''(x) = 2\ln(x) + 2 + 1 = 2\ln(x) + 3$	Minimum $T(e^{-0{,}5} / \approx -0{,}184)$

	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \ln(x) + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot [2\ln(x) + 1] = 0$ $\Leftrightarrow x = 0\ (\notin D(f))\ \vee\ 2\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-0,5} \approx 0,61$ $f''(e^{-0,5}) = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(e^{-0,5}) \approx -0,184$	
d. $f(x) = e^x - x$	$f'(x) = e^x - 1$ $f''(x) = e^x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ $f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ Minimum $\quad f(0) = 1$	Minimum T(0/1)
e. $f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{16}}$	$f'(x) = 2e^{-\frac{x^2}{16}} \cdot \left(-\frac{x}{8}\right) = -\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{16}}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{4} \cdot e^{-\frac{x^2}{16}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{4} \vee e^{-\frac{x^2}{16}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Untersuchung auf VZW bei f': $f'(-1) \approx 0,235$ und $f'(1) \approx -0,235$, d.h. VZW von + nach − => Maximum $f(0) = 2$	Maximum H(0/2)
f. $f(x) = \sqrt{5x+1}$;$x > -\frac{1}{5}$	$f'(x) = 0,5 \cdot 5 \cdot (5x+1)^{-0,5} = \frac{2,5}{\sqrt{5x+1}}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2,5}{\sqrt{5x+1}} = 0 \Leftrightarrow 2,5 = 0 \Rightarrow$ keine Lösung	kein Maximum und Minimum
g. $1 - \sin(x)$;$x \in [\pi;3\pi]$  	$f'(x) = -\cos(x)$ $f''(x) = \sin(x)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,5\pi \vee x = 2,5\pi$ $f''(1,5\pi) = \sin(1,5\pi) = -1 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\quad f(1,5\pi) = 2$ $f''(2,5\pi) = \sin(2,5\pi) = 1 > 0 \Rightarrow$ Minimum $\quad f(2,5\pi) = 0$	Maximum H(1,5 π/2) Minimum T(2,5 π/0)