Lösung Kurvendiskussion von Funktionenscharen

Aufgabe	Rechenweg	Ergebnis
1. $h_a(x) = x^2 - 3a^2x$, $a > 0$	**Symmetrie:** Die Funktion ist nicht symmetrisch, da sie sowohl ungerade als auch gerade Exponenten enthält. **Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse:** Schnittpunkt mit der y-Achse: $h_a(0) = 0$ Nullstellen: $x^2 - 3a^2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 3a^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3a^2$ **Extrema:** $h_a'(x) = 2x - 3a^2$ $\quad h_a''(x) = 2$ $h_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5a^2$ $h_a''(1{,}5a^2) = 2 > 0$, d.h. Minimum $h_a(1{,}5a^2) = 2{,}25a^4 - 4{,}5a^4 = -2{,}25a^4$ => TP $(1{,}5a^2/-2{,}25a^4)$ **Wendepunkte:** $h_a''(x) = 2 \neq 0$ => kein Wendepunkt	keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zu (0/0) $S_y(0/0)$ Nullstellen: $x = 0 \vee x = 3a^2$ Minimum TP $(1{,}5a^2/-2{,}25a^4)$ kein Wendepunkt

1. $h_a(x) = x^2 - 3a^2x$, $a \geq 0$	**Monotonie:** $h_a'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1{,}5a^2$ Überprüfung für $x < 1{,}5a^2$: $h_a'(0) = -3a^2 < 0$ d.h. $h_a(x)$ ist monoton fallend für $x < 1{,}5a^2$ (Hier könnte man schon aufhören, da es keine doppelten Nullstellen gibt.) Überprüfung für $x > 1{,}5a^2$: $h_a'(2a^2) = 4a^2 - 3a^2 = a^2 > 0$ d.h. $h_a(x)$ ist monoton steigend für $x > 1{,}5a^2$ **Krümmungsverhalten:** $h_a''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt **Verhalten gegen unendlich:** $\lim\limits_{x\to\infty} h_a(x) = \infty \; und \; \lim\limits_{x\to-\infty} h_a(x) = \infty$, denn es handelt sich um eine Funktion zweiten Grades, die eine positive Zahl vor x^2 hat.	 $h_a(x)$ ist streng monoton fallend für $x < 1{,}5a^2$ $h_a(x)$ ist streng monoton steigend für $x > 1{,}5a^2$ $h_a(x)$ ist immer linksgekrümmt $\lim\limits_{x\to\infty} h_a(x) = \infty \; und \; \lim\limits_{x\to-\infty} h_a(x) = \infty$

2. $f_a(x) = ax^3 - x$ $a > 0$	**Symmetrie:** Die Funktion ist punktsymmetrisch, da sie nur ungerade Exponenten enthält. **Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse:** Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_a(0) = 0$ Nullstellen: $ax^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax^2 - 1) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 = 1$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{a}$ $\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = \frac{1}{\sqrt{a}} \;\vee\; x = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ $\leftarrow \sqrt{a}$ existiert, da $a > 0$ **Extrema:** $f_a'(x) = a \cdot 3 \cdot x^2 - 1 = 3a \cdot x^2 - 1$ $f_a''(x) = 6ax$ $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3a}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3a}}$ $f_a''(\frac{1}{\sqrt{3a}}) = \frac{6a}{\sqrt{3a}} > 0$, d.h. Minimum $f_a(\frac{1}{\sqrt{3a}}) = a \cdot (\frac{1}{\sqrt{3a}})^3 - \frac{1}{\sqrt{3a}} = a \cdot (\frac{1}{\sqrt{3a}})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3a}} - \frac{1}{\sqrt{3a}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3a}} - \frac{1}{\sqrt{3a}} = -\frac{2}{3\sqrt{3a}}$ $\Rightarrow$ TP $(\frac{1}{\sqrt{3a}} / -\frac{2}{3\sqrt{3a}})$ $f_a''(-\frac{1}{\sqrt{3a}}) = -\frac{6a}{\sqrt{3a}} < 0$, d.h. Maximum $fa\left(-\frac{1}{\sqrt{3a}}\right) = a(-\frac{1}{\sqrt{3a}})^3 + \frac{1}{\sqrt{3a}} = \frac{2}{3\sqrt{3a}} \Rightarrow$ HP $(-\frac{1}{\sqrt{3a}} / \frac{2}{3\sqrt{3a}})$	punktsymmetrisch zu (0/0) $S_y(0/0)$ Nullstellen: $x = 0 \;\vee\; x = \frac{1}{\sqrt{a}} \;\vee\; x = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ Maximum HP $(-\frac{1}{\sqrt{3a}} / \frac{2}{3\sqrt{3a}})$ Minimum TP $(\frac{1}{\sqrt{3a}} / -\frac{2}{3\sqrt{3a}})$

2. $f_a(x) = ax^3 - x$ $a > 0$	**Wendepunkte:** $f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f_a'''(x) = 6a$ $f_a'''(0) = 6a > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt **Monotonie:** $f_a'(x) = 3a \cdot x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3a}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3a}}$ Überprüfung im Intervall $[-\frac{1}{\sqrt{3a}}; \frac{1}{\sqrt{3a}}]$: $f_a'(0) = -1 < 0 \Rightarrow f_a(x)$ ist streng monoton fallend Überprüfung für $x < -\frac{1}{\sqrt{3a}}$: $f_a'(-\frac{2}{\sqrt{3a}}) = 3a \cdot \frac{4}{3a} - 1 = 3 > 0 \Rightarrow f_a(x)$ ist monoton steigend Überprüfung für $x > \frac{1}{\sqrt{3a}}$: $f_a'(\frac{2}{\sqrt{3a}}) = 3 > 0 \Rightarrow f_a(x)$ ist monoton steigend **Krümmungsverhalten:** $f_a''(x) = 6ax > 0$ für $x > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt $f_a''(x) = 6ax > 0$ für $x < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt **Verhalten gegen unendlich:** $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \infty \; und \; \lim_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty$, denn es handelt sich um eine Funktion dritten Grades, die eine positive Zahl vor x^3 hat.	Wendepunkt W(0/0) f_a ist streng monoton steigend für $x < -\frac{1}{\sqrt{3a}}$ und $x > \frac{1}{\sqrt{3a}}$. f_a ist streng monoton fallend für $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3a}}; \frac{1}{\sqrt{3a}}]$. Die Funktion ist für $x > 0$ linksgekrümmt und für $x < 0$ rechtsgekrümmt. $\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \infty \; und \; \lim_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty$

3. $g_a(x) = -\frac{1}{6}x^4 + ax^3$, $a > 0$	**Symmetrie:** Die Funktion ist weder punk- noch achsensymmetrisch, da sie ungerade und gerade Exponenten enthält. **Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse:** Schnittpunkt mit der y-Achse: $g_a(0) = 0$ Nullstellen: $-\frac{1}{6}x^4 + ax^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (-\frac{1}{6}x + a) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{6}x = a \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6a$ **Extrema:** $g_a'(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3a \cdot x^2$ $\quad$ $g_a''(x) = -2x^2 + 6ax$ $g_a'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x^3 + 3a \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (-\frac{2}{3}x + 3a) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{2}{3}x = 3a \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4{,}5a$ $g_a''(0) = 0$, d.h. Untersuchung auf VZW bei $g_a'(x)$: $g_a'(-a) = \frac{2}{3}a^3 + 3a^3 = 3\frac{2}{3}a^3 > 0$ $\quad$ kein VZW => kein Extremum $g_a'(a) = -\frac{2}{3}a^3 + 3a \cdot a^2 = 2\frac{1}{3}a^3 > 0$ $g_a''(4{,}5a) = -40{,}5a^2 + 27a^2 = -13{,}5a^2 < 0$, d.h. Maximum $g_a(4{,}5a) = -\frac{1}{6}(4{,}5a)^4 + a(4{,}5a)^3 \approx -68{,}34\,a^4 + 91{,}25\,a^4 = 22{,}78\,a^4$ => HP$(4{,}5a \,/\, 22{,}78a^4)$	keine Achsensymmetrie zur y-Achse, keine Punktsymmetrie zu (0/0) $S_y(0/0)$ Nullstellen: $x = 0 \vee x = 6a$ Maximum $(4{,}5a \,/\, 22{,}78a^4)$

$g_a(x) = -\frac{1}{6}x^4 + ax^3$, $a > 0$	**Wendepunkte:** $g_a''(x) = -2x^2 + 6ax$ $\quad$ $g_a'''(x) = -4x + 6a$ $g_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-2x + 6a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3a$ $g_a'''(0) = 6a > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $g_a(0) = 0 \Rightarrow W_1(0/0)$ $g_a'''(3a) = -6a < 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $g_a(3a) = -13{,}5a^4 + 27a^4 \Rightarrow W_2(3a/-13{,}5a^4 + 27a^4)$ **Monotonie:** $g_a'(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3a \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4{,}5a$ Überprüfung im Intervall $[0; 4{,}5a]$: $g_a'(a) = \frac{7}{3}a^3 > 0 \Rightarrow g_a(x)$ ist streng monoton steigend Überprüfung für $x < 0$: $g_a'(-1) = \frac{2}{3} + 3a > 0 \Rightarrow g_a(x)$ ist streng monoton steigend Überprüfung für $x > 4{,}5a$: $g_a'(5a) = -8{,}\overline{3} < 0 \Rightarrow g_a(x)$ ist streng monoton fallend.	Wendepunkt $W_1(0/0)$ Wendepunkt $W_2(3a/13{,}5a^4)$ $g_a(x)$ ist streng monoton fallend für $x > 4{,}5a$ $g_a(x)$ ist streng monoton steigend für $x < 4{,}5a$

$g_a(x) = -\frac{1}{6}x^4 + ax^3$, $a > 0$	**Krümmungsverhalten:** $g_a''(x) = -2x^2 + 6ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3a$ Überprüfung für $x<0$: $g_a''(-1) = -2-6a < 0$ => rechtsgekrümmt für $x< 0$ Überprüfung für $x \epsilon [0;3a]$: $g_a''(2a) = -8a^2 + 16a^2 = 8a^2 > 0$ => linksgekrümmt Überprüfung für $x > 3a$: $g_a''(4a) = -32a^2 + 24a^2 = -8a^2 < 0$ => rechtsgekrümmt **limes:** $\lim_{x\to\infty} g_a(x) = -\infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} g_a(x) = -\infty$, denn es handelt sich um eine Funktion vierten Grades, die eine negative Zahl vor x^4 hat.	$g_a(x)$ ist linksgekrümmt für $x \epsilon [0;3a]$ $g_a(x)$ ist rechtsgekrümmt für $x>3a$ und $x<0$ $\lim_{x\to\infty} g_a(x) = -\infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} g_a(x) = -\infty$