

Lösungen zu den Steckbriefaufgaben

Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
<p>1. Geben Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion an, die durch die Punkte P(1/5), Q(-2/26) und R(3/21) geht!</p>	<p> $f(x) = ax^2 + bx + c$ P(1/5) einsetzen: $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5$ Q(-2/26) einsetzen: $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 26$ R(3/21) einsetzen: $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 21$ </p> <p>Man erhält folgendes Gleichungssystem:</p> $\begin{array}{l} \left \begin{array}{l} a + b + c = 5 \\ 4a - 2b + c = 26 \\ 9a + 3b + c = 21 \end{array} \right \begin{array}{l} I \\ (-1) \cdot II \\ (-1) \cdot III \end{array} \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} a + b + c = 5 \\ -4a + 2b - c = -26 \\ -9a - 3b - c = -21 \end{array} \right \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \\ \\ \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} a + b + c = 5 \\ -3a + 3b = -21 \\ -8a - 2b = -16 \end{array} \right \begin{array}{l} I \\ I + II \\ I + III \end{array} \end{array}$ <p>Nun berechnet man das Gleichungssystem mit 2 Unbekannten:</p> $\left \begin{array}{l} -3a + 3b = -21 \\ -8a - 2b = -16 \end{array} \right \cdot \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} -6a + 6b = -42 \\ -24a - 6b = -48 \end{array} \right \begin{array}{l} I \\ II \end{array} \Leftrightarrow$ $\left \begin{array}{l} -6a + 6b = -42 \\ -30a = -90 \end{array} \right \begin{array}{l} I \\ I + II \end{array} \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} -6 \cdot 3 + 6b = -42 \\ a = 3 \end{array} \right \begin{array}{l} I \\ I + II \end{array} \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} b = -4 \\ a = 3 \end{array} \right $ <p>Einsetzen in eine der ersten Gleichungen, z. B. in $a + b + c = 5$:</p> $3 - 4 + c = 5 \Leftrightarrow c = 6$	<p>$f(x) = 3x^2 - 4x + 6$</p>

2. Gesucht ist die Funktion dritten Grades, die durch den Ursprung geht, in $P(4/-\frac{80}{3})$ ein Minimum und in $x = -2$ ein Maximum hat.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Da sie durch den Ursprung geht, ist $d = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$P(4/-\frac{80}{3}) \text{ einsetzen: } 64a + 16b + 4c = -\frac{80}{3}$$

$$\text{Minimum bei } x = 4: f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b + c = 0$$

$$\text{Maximum bei } x = -2: f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4b + c = 0$$

Man erhält das folgende Gleichungssystem, das man wie oben löst:

$$\left| \begin{array}{l} 64a + 16b + 4c = -\frac{80}{3} \\ 48a + 8b + c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} I: (-4) \\ (-1) \cdot II \Leftrightarrow \\ III \end{array} \left| \begin{array}{l} -16a - 4b - c = \frac{20}{3} \\ -48a - 8b - c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -4a - 8b = \frac{20}{3} \\ -36a - 12b = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} I + III \\ II + III \\ III \end{array}$$

Nun berechnet man das Gleichungssystem mit 2 Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} -4a - 8b = \frac{20}{3} \\ -36a - 12b = 0 \end{array} \right| \cdot (-9) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 36a + 72b = -60 \\ -36a - 12b = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ II \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} 60b = -60 \\ -36a - 12b = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} I + II \\ II \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b = -1 \\ -36a - 12 \cdot (-1) = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ I \text{ in } II \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b = -1 \\ a = \frac{1}{3} \end{array} \right|$$

Einsetzen in eine der ersten Gleichungen, z. B. in $12a - 4b + c = 0$:

$$4 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$$

<p>3. Welche zum Ursprung punktsymmetrische Funktion dritten Grades hat in $x_0 = 1$ ein Minimum und geht durch den Punkt $P(2/4)$?</p>	<p>$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Da sie durch den Ursprung geht, ist $d = 0$. Da sie punktsymmetrisch ist, kann sie nur ungerade Exponenten enthalten, also ist $b = 0$. $f(x) = ax^3 + cx$ $P(2/4)$ einsetzen: $8a + 2c = 4$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ Minimum bei $x_0 = 1$: $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 0$</p> <p>Man erhält das folgende Gleichungssystem:</p> $\begin{cases} 8a + 2c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2c = 4 \\ c = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2 \cdot (-3a) = 4 \\ c = -3a \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2 \cdot (-3a) = 4 \\ c = -3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -6 \end{cases}$	<p>$f(x) = 2x^3 - 6x$</p>
<p>4. Gesucht ist eine achsensymmetrische Funktion vierten Grades, die die y-Achse bei 4 schneidet. Sie hat in $P(2/804)$ einen Wendepunkt!</p>	<p>$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ f ist achsensymmetrisch \Rightarrow alle ungeraden Potenzen entfallen, d.h. $b = 0$ und $d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$</p> <p>$P(0/4) \Rightarrow e = 4 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + 4$ $f(2) = 804 \Leftrightarrow 16a + 4c + 4 = 804$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$ $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 48a + 2c = 0$</p> $\begin{cases} 16a + 4c + 4 = 804 \\ 48a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 4c = 800 \\ -24a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 4 \cdot (-24a) = 800 \\ -24a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ 240 = c \end{cases}$	<p>$f(x) = -10x^4 + 240x^2 + 4$</p>

<p>5. Geben Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion an, die die x-Achse bei 3 schneidet und im Punkt $P(-1/-32)$ eine waagerechte Tangente hat!</p>	<p> $f(x) = ax^2 + bx + c$ $P(3/0)$ einsetzen: $9a + 3b + c = 0$ $P(-1/-32)$ einsetzen: $a - b + c = -32$ $f'(x) = 2ax + b$ $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$ </p> $\begin{array}{l} \left \begin{array}{l} 9a + 3b + c = 0 \\ a - b + c = -32 \\ -2a + b = 0 \end{array} \right \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} 9a + 6a + c = 0 \\ a - 2a + c = -32 \\ b = 2a \end{array} \right \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} 15a + c = 0 \\ -a + c = -32 \\ b = 2a \end{array} \right \\ \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} 15a + a - 32 = 0 \\ c = a - 32 \\ b = 2a \end{array} \right \Leftrightarrow \left \begin{array}{l} a = 2 \\ c = 2 - 32 = -30 \\ b = 2 \cdot 2 = 4 \end{array} \right \end{array}$	<p>$f(x) = 2x^2 + 4x - 30$</p>
<p>6. Welche achsensymmetrische Funktion zweiten Grades, die die y-Achse bei 8 schneidet, schließt mit der x-Achse im Intervall $[0;1]$ eine Fläche von $\frac{22}{3}$ ein?</p>	<p> $f(x) = ax^2 + bx + c$ f ist achsensymmetrisch \Rightarrow alle ungeraden Potenzen entfallen, d.h. $b = 0$ $f(x) = ax^2 + c$ </p> <p> $P(0/8)$ einsetzen: $c = 8$ $f(x) = ax^2 + 8$ $\int_0^1 (ax^2 + 8) dx = \frac{8}{3}$ $\Leftrightarrow \left[\frac{1}{3} ax^3 + 8x \right]_0^1 = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} a + 8 = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} a = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow a = -2$ </p>	<p>$f(x) = -2x^2 + 8$</p>