

# Lösungen zu den Übungen zur Ableitung mit der h-Methode

Aufgabe	Lösung
<p>1. Berechne die Ableitung der Funktion f an der Stelle <math>x_0</math> mit der h-Methode!</p> <p>a. <math>f(x) = 6x + 1</math>      <math>x_0 = 2</math>  b. <math>f(x) = x^2</math>      <math>x_0 = 3</math>  c. <math>f(x) = 2x^3</math>      <math>x_0 = -1</math>  d. <math>f(x) = -x^2 + 4</math>      <math>x_0 = -4</math>  e. <math>f(x) = -4x^4 + 2x</math>      <math>x_0 = 1</math></p>	<p>a. <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 \cdot (2+h) + 1 - [6 \cdot 2 + 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + 6h + 1 - 12 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6 = 6</math></p> <p>b. <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6</math></p> <p>c. <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (-1+h)^3 - 2 \cdot (-1)^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot [(-1)^3 + 3(-1)^2 h + 3(-1)h^2 + h^3] + 2}{h}</math>  <math>= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 + 6h - 6h^2 + 2h^3 + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - 6h^2 + 2h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 - 6h + 2h^2) = 6</math></p> <p>d. <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(-4+h)^2 + 4 - [ -(-4)^2 + 4 ]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(16 - 8h + h^2) + 4 - [-16 + 4]}{h} =</math>  <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-16 + 8h - h^2 + 4 - [-12]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 - h) = 8</math></p> <p>e. <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4(1^4 + 4 \cdot 1^3 h + 6 \cdot 1^2 h^2 + 4 \cdot 1 h^3 + h^4) + 2 \cdot (1+h) - (-4 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1)}{h} =</math>  <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - 16h - 24h^2 - 16h^3 - 4h^4 + 2 + 2h - (-4 + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-16h - 24h^2 - 16h^3 - 4h^4 + 2h}{h} =</math>  <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-14h - 24h^2 - 16h^3 - 4h^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-14 - 24h - 16h^2 - 4h^3) = -14</math></p>
<p>2. Berechne <math>f'(x_0)</math> für allgemeine <math>x_0</math> mit der h-Methode!</p> <p>a. <math>f(x) = -2x^3</math></p>	<p>a. <math>\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x_0+h)^3 - (-2(x_0)^3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3) + 2(x_0)^3}{h}</math>  <math>= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x_0^3 - 6x_0^2 h - 6x_0 h^2 - 2h^3 + 2(x_0)^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6x_0^2 h - 6x_0 h^2 - 2h^3}{h} =</math>  <math>\lim_{h \rightarrow 0} (-6x_0^2 - 6x_0 h - 2h^2) = -6x_0^2</math></p>

<p>b. <math>f(x) = 3x^2 - 6</math></p> <p>c. <math>f(x) = x^4 + 3x</math></p> <p>d. <math>f(x) = 4x^5</math></p> <p>e. <math>f(x) = 3x + 8</math></p>	<p>b. <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x_0+h)^2-6-[3(x_0)^2-6]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2+6x_0h+3h^2-6-3(x_0)^2+6}{h}</math> <math display="block">= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x_0h+3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x_0 + 3h) = 6x_0</math></p> <p>c. <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^4+3(x_0+h)-[(x_0)^4+3x_0]}{h}</math> <math display="block">= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^4+4x_0^3h+6x_0^2h^2+4x_0h^3+h^4+3x_0+3h-x_0^4-3x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x_0^3h+6x_0^2h^2+4x_0h^3+h^4+3h}{h}</math> <math display="block">= \lim_{h \rightarrow 0} (4x_0^3 + 6x_0^2h + 4x_0h^2 + h^3 + 3) = 4x_0^3 + 3</math></p> <p>d. <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x_0+h)^5-4(x_0)^5}{h} =</math> <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (x_0^5+5x_0^4h+10x_0^3h^2+10x_0^2h^3+5x_0h^4+h^5)-4 \cdot (x_0)^5}{h} =</math> <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \cdot x_0^5+20 \cdot x_0^4h+40 \cdot x_0^3h^2+40 \cdot x_0^2h^3+20 \cdot x_0h^4+4 \cdot h^5-4(x_0)^5}{h} =</math> <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} \frac{20x_0^4h+40x_0^3h^2+40x_0^2h^3+20x_0h^4+4h^5}{h} =</math> <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} (20 \cdot x_0^4 + 40 \cdot x_0^3h + 40 \cdot x_0^2h^2 + 20 \cdot x_0h^3 + 4 \cdot h^4) = 20 \cdot x_0^4</math></p> <p>e. <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (x_0+h)+8-[3 \cdot x_0+8]}{h} =</math> <math display="block">\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \cdot x_0+3h+8-3 \cdot x_0-8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3</math></p>
<p>3. Berechne die Ableitung von <math>f(x) = x^n</math> für allgemeine <math>x_0</math> mit der h-Methode!</p>	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^n+nx_0^{n-1}h+Zahl \cdot x_0^{n-2}h^2+\dots+h^n-x_0^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx_0^{n-1}h+Zahl \cdot x_0^{n-2}h^2+\dots+h^n}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} (n \cdot x_0^{n-1} + \underbrace{Zahl \cdot x_0^{n-2} \cdot h + \dots + h^{n-1}}_{\text{streben gegen 0}}) = n \cdot x_0^{n-1}$ <p style="text-align: center; color: cyan;">Da alle diese Summanden mindestens ein h enthalten, streben sie gegen 0.</p>