Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe der Stochastik für das Abitur

<table>
<tr><th>Begriff</th><th>Definition</th><th>Beispiel</th></tr>
<tr><td>Multiplikation von Matrizen</td><td>

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + a_{1,3} \cdot b_{3,1} & a_{1,1} \cdot b_{1,2} + a_{1,2} \cdot b_{2,2} + a_{1,3} \cdot b_{3,2} \\ a_{2,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,2} \cdot b_{2,1} + a_{2,3} \cdot b_{3,1} & a_{2,1} \cdot b_{1,2} + a_{2,2} \cdot b_{2,2} + a_{2,3} \cdot b_{3,2} \\ a_{3,1} \cdot b_{1,1} + a_{3,2} \cdot b_{2,1} + a_{3,3} \cdot b_{3,1} & a_{3,1} \cdot b_{1,2} + a_{3,2} \cdot b_{2,2} + a_{3,3} \cdot b_{3,2} \end{pmatrix}$$

</td><td>

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -2 & 0 & 6 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{9} & 8 \\ \mathbf{-5} & -1 \\ \mathbf{2} & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3 \cdot 9 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 2} & 3 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 9 + 0 \cdot (-5) + 6 \cdot 2 & (-2) \cdot 8 + 0 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 9 + 7 \cdot (-5) + 4 \cdot 2 & (-1) \cdot 8 + 7 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 26 \\ -6 & 8 \\ -36 & 1 \end{pmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>Startvektor</td><td>Der Startvektor $\overrightarrow{v_0}$ gibt die Verteilung zu Beginn des Prozesses an.</td><td>In einer Stadt gibt es drei Supermärkte. Zu Beginn kaufen 20% regelmäßig im Supermarkt A ein, 25 % im Supermarkt B und 55% bei C.

=> $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}25 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$

</td></tr>
<tr><td>stochastische Matrix</td><td>Eine stochastische Matrix U gibt an, wie ein Wechsel von einem Zustand in den anderen mit gleich bleibenden Wahrscheinlichkeiten erfolgt.
Eigenschaften:

- alle Zahlen der Matrix liegen zwischen 0 und 1
- die Summe der Zahlen einer Spalte ist 1
- gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen

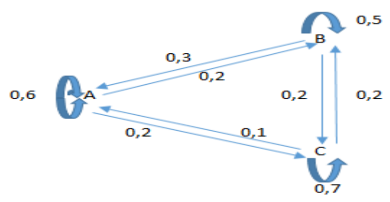
</td><td>In der Kleinstadt wechseln nach einem Jahr die Kunden entsprechend der folgenden Verteilung ihre Supermärkte:

<table>
<tr><th>von / nach</th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>A</td><td>0,6</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,7</td></tr>
</table>

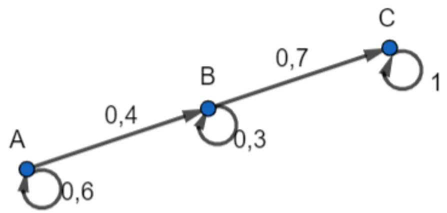
stochastische Matrix:

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>Prozessdiagramm</td><td>Ein vereinfachtes Baumdiagramm, bei dem die Wahrscheinlichkeiten von einer Stufe zur anderen immer gleich bleiben. Das Prozessdiagramm kann in eine stochastische Matrix umgewandelt werden und umgekehrt.</td><td>



</td></tr>
</table>

Verteilung nach x Jahren	(stochastische Matrix)^x · (Startvektor) = $U^x \cdot \overrightarrow{v_0}$	$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 03 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}25 \\ 0{,}55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}28 \\ 0{,}2825 \\ 0{,}4375 \end{pmatrix}$ Nach 2 Jahren kaufen 28% im Supermarkt A, 28,25% im Supermarkt B und 43,75% im Supermarkt C.
Folgeverteilung	$U^2 \cdot \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_2}$ und $U^3 \cdot \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_3}$ etc. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ ... sind die Folgeverteilungen	$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0{,}28 \\ 0{,}2825 \\ 0{,}4375 \end{pmatrix}$
Verteilung vor x Jahren	(stochastische Matrix)$^{-x}$ · (Startvektor) = $U^{-x} \cdot \overrightarrow{v_0}$	$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 03 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}25 \\ 0{,}55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}133333 \\ 0{,}166667 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$ Vor 1 Jahr kauften 13,34% im Supermarkt A, 16,67% im Supermarkt B und 70% im Supermarkt C ein.
absorbierende und innere Zustände	Die Wahrscheinlichkeit, einen absorbierenden Zustand zu verlassen, ist 0. Er kann damit nicht mehr verlassen werden. Alle anderen Zustände heißen innere Zustände.	 Der Endzustand C ist ein absorbierender Zustand, A und B sind innere Zustände.

Grenzverteilung /Fixvektor	Wenn die Folgeverteilungen $\overrightarrow{v_n}$ für n→ ∞ gegen eine Verteilung $\vec{g}$ strebt, so nennt man diese Verteilung die Grenzverteilung. Es gilt: $\vec{g} \; = \; U^n \cdot \overrightarrow{v_0}$ für n→ ∞ Die Grenzverteilung ist unabhängig von der Anfangsverteilung. Man berechnet die Grenzverteilung, indem man a. mit dem Taschenrechner die Folgeverteilungen für hohe n berechnet, bis sich die Zahlen kaum mehr ändern (≈ 3-4 Stellen hinter dem Komma) b. durch ein lineares Gleichungssystem, indem man den Fixvektor $\vec{x}$ berechnet: U $\cdot$ $\vec{x}$ = $\vec{x}$ mit $\vec{x} \neq 0$ <u>Bedingung</u> für die Existenz einer Grenzmatrix, Grenzverteilung und eines Fixvektors: Wenn es unter den Übergangsmatrizen U^n mindestens eine Matrix gibt, deren Zahlen keine 0 enthalten.	1.1 *Dok RAD $\begin{bmatrix}0.6&0.3&0.1\\0.2&0.5&0.2\\0.2&0.2&0.7\end{bmatrix}^{20}\cdot\begin{bmatrix}0.2\\0.25\\0.55\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0.314286\\0.285714\\0.4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0.6&0.3&0.1\\0.2&0.5&0.2\\0.2&0.2&0.7\end{bmatrix}^{50}\cdot\begin{bmatrix}0.2\\0.25\\0.55\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0.314286\\0.285714\\0.4\end{bmatrix}$ a. $\Rightarrow \vec{g} = \begin{pmatrix}0{,}314286\\0{,}285714\\0{,}4\end{pmatrix}$ $b. \begin{pmatrix}0{,}6&03&0{,}1\\0{,}2&0{,}5&0{,}2\\0{,}2&0{,}2&0{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\text{solve}\left(\begin{cases}0.6\cdot x+0.3\cdot y+0.1\cdot z=x\\0.2\cdot x+0.5\cdot y+0.2\cdot z=y\\x+y+z=1\end{cases},\{x,y,z\}\right)$ $x=0.314286$ and $y=0.285714$ and $z=0.4$ (Wichtig: 3. Zeile bei Wahrscheinlichkeiten durch **x + y + z = 1** bzw. bei Gesamtzahlen durch **x + y + z = Gesamtzahl** ersetzen)
Grenzmatrix	Wenn die Übergangsmatrizen U^n für n→ ∞ gegen eine Matrix G streben, so nennt man diese Matrix die Grenzmatrix G. Es gilt: G = U^n für n→ ∞ und G $\cdot$ $\overrightarrow{v_0}$ = $\vec{g}$ Man berechnet die Grenzmatrix, indem man mit dem Taschenrechner die Matrizen U^n für hohe n berechnet, bis sich die Zahlen kaum mehr ändern. Bei der Grenzmatrix sind alle Spalten gleich. Die Grenzverteilung gibt die Spalte einer Grenzmatrix an.	$\begin{bmatrix}0.6&0.3&0.1\\0.2&0.5&0.2\\0.2&0.2&0.7\end{bmatrix}^{20}$ $\begin{bmatrix}0.314286&0.314286&0.314285\\0.285714&0.285714&0.285714\\0.4&0.4&0.400001\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0.6&0.3&0.1\\0.2&0.5&0.2\\0.2&0.2&0.7\end{bmatrix}^{50}$ $\begin{bmatrix}0.314286&0.314286&0.314286\\0.285714&0.285714&0.285714\\0.4&0.4&0.4\end{bmatrix}$ $G=\begin{pmatrix}0{,}314286&0{,}314286&0{,}314286\\0{,}285714&0{,}285714&0{,}285714\\0{,}4&0{,}4&0{,}4\end{pmatrix}$
stationäre Verteilung	Gegeben ist die Übergangsmatrix U und als Startverteilung der zugehörige Fixvektor $\vec{x}$, so nennt man die durch $\vec{x}$ beschriebene Verteilung eine stationäre Verteilung.	