Lösungen zu den Übungen zum Erwartungswert

<table>
<tr><th>Übung</th><th>Lösung</th></tr>
<tr><td>1. Aus einer Urne mit 12 roten und 20 grünen Kugeln werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. X sei die Anzahl der gezogenen grünen Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X!</td><td>
<table>
<tr><td>a</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>P(X=a)</td><td>$\frac{12}{32}\cdot\frac{12}{32}=\frac{9}{64}$</td><td>$\frac{12}{32}\cdot\frac{20}{32}+\frac{20}{32}\cdot\frac{12}{32}=\frac{15}{32}$</td><td>$\frac{20}{32}\cdot\frac{20}{32}=\frac{25}{64}$</td></tr>
</table>
E(X)= $1\cdot\frac{15}{32}+2\cdot\frac{25}{64}=\frac{80}{64}\approx 1{,}25$ => Im Schnitt werden 1,25 grüne Kugeln gezogen.
</td></tr>
<tr><td>2. Vervollständigen Sie die Tabelle und berechnen Sie den Erwartungswert!
<table>
<tr><td>a</td><td>−10</td><td>0</td><td>10</td><td>50</td></tr>
<tr><td>P(X=a)</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td>a</td><td>−10</td><td>0</td><td>10</td><td>50</td></tr>
<tr><td>P(X=a)</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,2*</td></tr>
</table>
*1 – 0,4 – 0,1 – 0,3 = 0,2
E(X) = 0,4 · (−10) + 0,3 · 10 + 50 · 0,2 = 9
</td></tr>
<tr><td>3. Ein Losverkäufer nimmt 2 € pro Los. 80% der Lose sind Nieten, bei 2% der Lose gewinnt man 20€, bei 5 % der Lose 10€ und bei 13% gewinnt man 5€. Berechnen Sie, ob der Losverkäufer auf lange Sicht einen Gewinn pro Los macht!</td><td>
<table>
<tr><td>Gewinn/Verlust</td><td>2</td><td>−18*</td><td>−8</td><td>−3</td></tr>
<tr><td>P(X=a)</td><td>0,8</td><td>0,02</td><td>0,05</td><td>0,13</td></tr>
</table>
*2€ Einnahmen − 20€ Ausgabe
E(X) = 2 · 0,8 − 18· 0,02 − 8 · 0,05 − 3 · 0,13 = 0,45 => Auf lange Sicht macht der Losverkäufer 0,45 € Gewinn pro Los.
</td></tr>
<tr><td>4. Ein Losverkäufer verkauft Lose. 80% der Lose sind Nieten, bei 6% der Lose gewinnt man 10€, bei 5 % der Lose 5€ und bei 9% gewinnt man 2€.</td><td>
<table>
<tr><td>Gewinn/Verlust</td><td>x*</td><td>x−10</td><td>x−5</td><td>x−2</td></tr>
<tr><td>P(X=a)</td><td>0,8</td><td>0,06</td><td>0,05</td><td>0,09</td></tr>
</table>
*x = Preis des Loses in €
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
a. Berechnen Sie, wieviel ein Los kosten muss, damit der Losverkäufer auf lange Sicht einen Gewinn pro Los macht!
b. Berechnen Sie, wieviel ein Los kosten muss, damit der Losverkäufer auf lange Sicht einen Gewinn von 1€ pro Los macht!
</td>
<td>
a. E(X) = 0
$\Leftrightarrow$ E(X) = $x \cdot 0{,}8 + (x-10) \cdot 0{,}06 + (x-5) \cdot 0{,}05 + (x-2) \cdot 0{,}09 = 0$
$\Leftrightarrow$ $0{,}8x + 0{,}06x - 0{,}6 + 0{,}05x - 0{,}25 + 0{,}09x - 0{,}18 = 0 \Leftrightarrow x - 1{,}03 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}03$
Der Losverkäufer sollte mehr als 1,03€ pro Los verlangen.

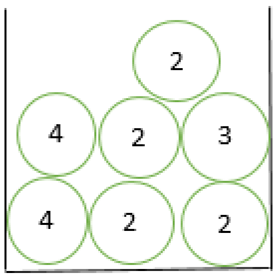
b. E(X) = 1 $\Leftrightarrow x - 1{,}03 = 1 \Leftrightarrow x = 2{,}03$
Um einen Gewinn von 1€ pro Los machen zu können, sollte er 2,03€ pro Los verlangen.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
5. Bei einem Würfelspiel mit zwei Würfeln erhält man 1€, wenn man eine Würfelsumme von 4, 5 oder 6 hat, und 2 €, wenn man eine Würfelsumme von 3 oder 8 hat. Man muss 3€ bezahlen, wenn man eine Summe von 2, 7,9, 10 würfelt. Bei einer Würfelsumme von 11 oder 12 erhält man nichts. Gewinnt oder verliert man bei diesem Spiel langfristig?
</td>
<td>
<table>
<tr><th>X = Würfelsumme</th><th>P(X)</th><th>Y = Gewinn/Verlust in €</th><th>Erklärung</th></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{1}{36}$*</td><td>-3</td><td rowspan="11">*$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ = P(1) · P(1)

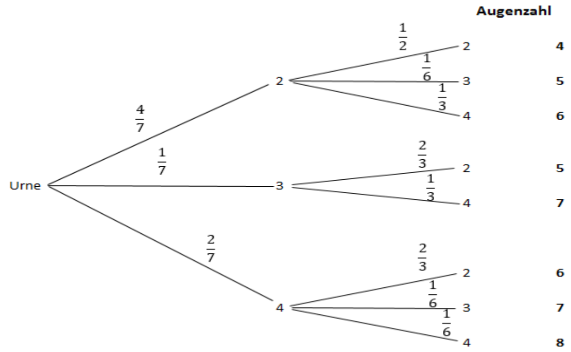
**$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$ = P(1) · P(2) + P(2) · $P(1)$
Rest analog</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{2}{36}$**</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{3}{36}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\frac{4}{36}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\frac{5}{36}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$\frac{5}{36}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$\frac{4}{36}$</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$\frac{3}{36}$</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$\frac{2}{36}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$\frac{1}{36}$</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

$E(X) = \frac{1}{36} \cdot (-3) + \frac{2}{36} \cdot 2 + \frac{3}{36} \cdot 1 + \frac{4}{36} \cdot 1 + \frac{5}{36} \cdot 1 + \frac{6}{36} \cdot (-3) + \frac{5}{36} \cdot 2 + \frac{4}{36} \cdot (-3) + \frac{3}{36} \cdot (-3) = -\frac{4}{9}$

Man verliert langfristig, da der Erwartungswert negativ ist.

6. Aus einer Urne werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X sei die Summe der beiden Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert!





$E(X) = 4 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot [\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3}] + 6 \cdot [\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}] + 7 \cdot [\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}] + 8 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{38}{7} \approx 5{,}43$

7. Jemand mischt 3 rote und 5 schwarze Coupons in einem nicht einsehbaren Behälter. Frau Müller zieht einen Coupon nach dem anderen, bis sie den ersten roten Coupon in der Hand hält. Die Zufallsgröße ist die Anzahl der Züge. Mit wie vielen Zügen muss sie im Mittel rechnen?

A: Anzahl der Züge bis zur 1. roten Kugel	1	2	3	4	5	6
P(X=A)	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{28}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{56}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{56}$

$E(X) = \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{15}{56} + 3 \cdot \frac{5}{28} + 4 \cdot \frac{3}{28} + 5 \cdot \frac{3}{56} + 6 \cdot \frac{1}{56} = \frac{21}{56} + \frac{30}{56} + \frac{30}{56} + \frac{24}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{126}{56} = 2{,}25$

Man muss im Mittel mit 2,25 Zügen rechnen.