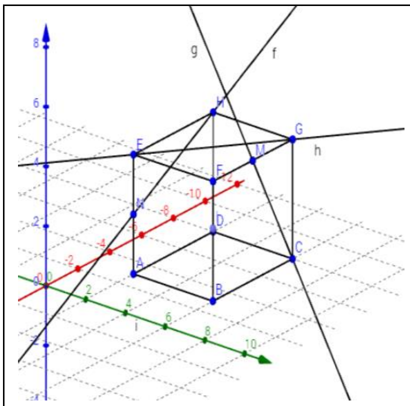
Lösungen zu den Übungen zu Winkeln zwischen Vektoren und Geraden

Aufgabe	Rechnung
1. a. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\2\\9\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ $= \frac{2\cdot6+4\cdot2+4\cdot9}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+9^2}} = \frac{56}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{121}} = \frac{56}{66}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{56}{66}) \approx 31{,}95$ Der Winkel beträgt ungefähr $31{,}95^0$.
b. $\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}10\\-10\\5\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{(-4)\cdot10+2\cdot(-10)+(-4)\cdot5}{\sqrt{(-4)^2+2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{10^2+10^2+5^2}}$ $= \frac{-80}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{225}} = \frac{-80}{90} = -\frac{8}{9}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-\frac{8}{9}) \approx 152{,}73$ Der Winkel beträgt ungefähr $152{,}73^0$.
c. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-8\\16\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}10\\-6\\\sqrt{8}\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{2\cdot10+(-8)\cdot(-6)+16\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{2^2+(-8)^2+16^2}\cdot\sqrt{10^2+(-6)^2+(\sqrt{8})^2}}$ $= \frac{113{,}255}{\sqrt{324}\cdot\sqrt{144}} \approx 0{,}524$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}524) \approx 58{,}39$ Der Winkel beträgt ungefähr $58{,}39^0$.
2. Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks, das durch die Punkte A (7/3/8), B (11/—1/9) und C (3/4/—5) aufgespannt wird!	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\-4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-4\\1\\-13\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-4\\4\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-8\\5\\-14\end{pmatrix}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{4^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{33}$ $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{(-8)^2+5^2+(-14)^2} = \sqrt{285}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{(-4)^2+1^2+(-13)^2} = \sqrt{186}$ Winkel bei A: $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{(-4)\cdot4+(-4)\cdot1+1\cdot(-13)}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{186}} =$ $\frac{-33}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{186}} \approx -0{,}42$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0{,}42) \approx 114{,}9$ Winkel bei B: $\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{BA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert} = \frac{(-4)\cdot(-8)+4\cdot5+(-1)\cdot(-14)}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{285}}$ $= \frac{66}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{285}} \approx 0{,}68$ $\Leftrightarrow \beta = \cos^{-1}(0{,}68) \approx 47{,}16$

	Winkel bei C: $\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\lvert\overrightarrow{CA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CB}\rvert} = \frac{4\cdot 8+(-1)\cdot(-5)+13\cdot 14}{\sqrt{186}\cdot\sqrt{285}}$ $= \frac{219}{\sqrt{186}\cdot\sqrt{285}} \approx 0{,}95$ $\Leftrightarrow \gamma = \cos^{-1}(0{,}95) \approx 18{,}19$ 18,19 + 47,16 + 114,9 = 180,25 ≈ 180, also richtig
3.a. $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ $\frac{1\cdot 6+0\cdot 2+2\cdot 2}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+2^2}}$ $= \frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{44}} \approx 0{,}674$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}674) \approx 47{,}62$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $47{,}62^0$.
b. $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{(-3)\cdot 2+(-2)\cdot 3+(-1)\cdot(-6)}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}$ $= \frac{-6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{49}} \approx -0{,}23$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0{,}23) \approx 103{,}3$ 180−103,3 =76,7 (Man muss den kleineren Winkel nehmen! Alternativ kann man mit Betrag rechnen.) Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $76{,}7^0$.
c. $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}23\\26\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\-2\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{(-1)\cdot 10+3\cdot 10+1\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{10^2+10^2+(-2)^2}}$ $= \frac{18}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{204}} \approx 0{,}38$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}38) \approx 67{,}67$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $67{,}67^0$.
d. $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$ $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\-14\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{2\cdot 8+2\cdot 6+(-3)\cdot 2}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{8^2+6^2+2^2}}$ $= \frac{22}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{104}} \approx 0{,}52$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}52) \approx 58{,}67$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $58{,}67^0$.
4. Gegeben ist A(−3/2/0), B(−3/6/0), H(−8/2/4), M und N sind die Mittelpunkte der Strecken. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden f, g und h und ihre Schnittwinkel!	C(−8/6/0), E(−3/2/4), F(−3/6/4), G(−8/6/4) $\vec{m} = 0{,}5\cdot(\vec{f}+\vec{g}) = \begin{pmatrix}-5{,}5\\6\\4\end{pmatrix}$ d. h. M(−5,5/6/4) $\vec{n} = 0{,}5\cdot(\vec{a}+\vec{e}) = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ d. h. N (−3/2/2) $f: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$ und $\left\lvert\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5{,}5\\6\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\4\end{pmatrix}$ und $\left\lvert\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\4\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{2{,}5^2+4^2} = \sqrt{22{,}25}$



$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{41}$

Winkel zwischen f und g:

$\cos(\alpha) = \frac{5 \cdot 2{,}5 + 0 + (-2) \cdot 4}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{22{,}25}} = \frac{4{,}5}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{22{,}25}} \approx 0{,}177$

$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}177) \approx 79{,}8$

Die Geraden f und g schneiden sich in einem Winkel von $79{,}8^0$.

Winkel zwischen f und h:

$\cos(\alpha) = \frac{5 \cdot 5 + 0 + 0}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{41}} = \frac{25}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{41}} \approx 0{,}725$

$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}725) \approx 43{,}53$

Die Geraden f und h schneiden sich in einem Winkel von $43{,}35^0$.

Winkel zwischen g und h:

$\cos(\alpha) = \frac{2{,}5 \cdot 5 + 0 + 0}{\sqrt{22{,}25} \cdot \sqrt{41}} = \frac{12{,}5}{\sqrt{22{,}25} \cdot \sqrt{41}} \approx 0{,}414$

$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}414) \approx 65{,}54$

Die Geraden g und h schneiden sich in einem Winkel von $65{,}54^0$.