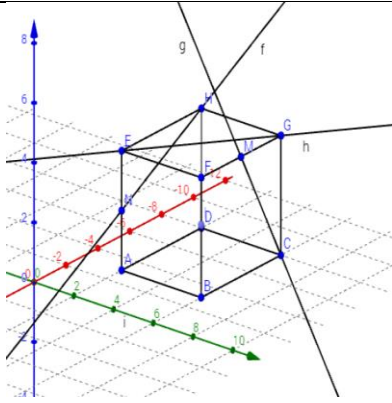


Lösungen zu den Übungen zu Winkeln zwischen Vektoren und Geraden

Aufgabe	Rechnung
1. a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$ $= \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2}} = \frac{65}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{65}{66}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{65}{66}\right) \approx 9,99$ <p>Der Winkel beträgt ungefähr 9,99°.</p>
b. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{(-4) \cdot 10 + 2 \cdot (-10) + (-4) \cdot 5}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{10^2 + 10^2 + 5^2}}$ $= \frac{-80}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{225}} = \frac{-80}{90} = -\frac{8}{9}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{8}{9}\right) \approx 152,73$ <p>Der Winkel beträgt ungefähr 152,73°.</p>
c. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 10 + (-8) \cdot (-6) + 16 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{2^2 + (-8)^2 + 16^2} \cdot \sqrt{10^2 + (-6)^2 + (\sqrt{8})^2}}$ $= \frac{113,255}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{144}} \approx 0,524$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,524) \approx 58,39$ <p>Der Winkel beträgt ungefähr 58,39°.</p>
2. Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks, das durch die Punkte A (7/3/8), B (11/-1/9) und C (3/4/-5) aufgespannt wird!	$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}$ $ \vec{AB} = \vec{BA} = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{33}$ $ \vec{BC} = \sqrt{(-8)^2 + 5^2 + (-14)^2} = \sqrt{285}$ $ \vec{AC} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-13)^2} = \sqrt{186}$ <p>Winkel bei A: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AC} } = \frac{(-4) \cdot 4 + (-4) \cdot 1 + 1 \cdot (-13)}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{186}} = \frac{-33}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{186}} \approx -0,42$</p> $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0,42) \approx 114,9$ <p>Winkel bei B: $\cos(\beta) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{ \vec{BA} \cdot \vec{BC} } = \frac{(-4) \cdot (-8) + 4 \cdot 5 + (-1) \cdot (-14)}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{285}} = \frac{66}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{285}} \approx 0,68$</p> $\Leftrightarrow \beta = \cos^{-1}(0,68) \approx 47,16$

	<p>Winkel bei C: $\cos(\gamma) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{ \overline{CA} \cdot \overline{CB} } = \frac{4 \cdot 8 + (-1) \cdot (-5) + 13 \cdot 14}{\sqrt{186} \cdot \sqrt{285}}$</p> <p>$= \frac{219}{\sqrt{186} \cdot \sqrt{285}} \approx 0,95$</p> <p>$\Leftrightarrow \gamma = \cos^{-1}(0,95) \approx 18,19$</p> <p>$18,19 + 47,16 + 114,9 = 180,25 \approx 180$, also richtig</p>
<p>3.a. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$</p> <p>h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$</p>	<p>$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$</p> <p>$= \frac{1 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 2^2}}$</p> <p>$= \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{44}} \approx 0,674$</p> <p>$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,674) \approx 47,62$</p> <p>Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $47,62^\circ$.</p>
<p>b. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$</p> <p>h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$</p>	<p>$\cos(\alpha) = \frac{(-3) \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot (-6)}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}}$</p> <p>$= \frac{-6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{49}} \approx -0,23$</p> <p>$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0,23) \approx 103,3$</p> <p>Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $103,3^\circ$.</p>
<p>c. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 23 \\ 26 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$</p> <p>h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$</p>	<p>$\cos(\alpha) = \frac{(-1) \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{10^2 + 10^2 + (-2)^2}}$</p> <p>$= \frac{18}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{204}} \approx 0,38$</p> <p>$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,38) \approx 67,67$</p> <p>Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $67,67^\circ$.</p>
<p>d. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$</p> <p>h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$</p>	<p>$\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{8^2 + 6^2 + 2^2}}$</p> <p>$= \frac{22}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{104}} \approx 0,52$</p> <p>$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,52) \approx 58,67$</p> <p>Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $58,67^\circ$.</p>
<p>4. Gegeben ist A(-3/2/0), B(-3/6/0), H(-8/2/4), M und N sind die Mittelpunkte der Strecken. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden f, g und h und ihre Schnittwinkel!</p>	<p>C(-8/6/0), E(-3/2/4), F(-3/6/4), G(-8/6/0)</p> <p>$\vec{m} = 0,5 \cdot (\vec{f} + \vec{g}) = \begin{pmatrix} -5,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ d. h. M(-5,5/4/4)</p> <p>$\vec{n} = 0,5 \cdot (\vec{a} + \vec{e}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d. h. N(-3/2/2)</p> <p>f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$</p> <p>g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$</p>



$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen f und g:

$$\cos(\alpha) = \frac{5 \cdot 2,5 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4}{\sqrt{5^2 + 0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2,5^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{4,5}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{26,25}} \approx 0,16$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,16) \approx 80,79$$

Die Geraden f und g schneiden sich in einem Winkel von $80,79^\circ$.

Winkel zwischen f und h:

$$\cos(\alpha) = \frac{5 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 0}{\sqrt{5^2 + 0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{25}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{25}} \approx 0,928$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,928) \approx 21,87$$

Die Geraden f und h schneiden sich in einem Winkel von $21,87^\circ$.

Winkel zwischen g und h:

$$\cos(\alpha) = \frac{2,5 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 0}{\sqrt{26,25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{12,5}{\sqrt{26,25} \cdot \sqrt{25}} \approx 0,488$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,488) \approx 60,79$$

Die Geraden g und h schneiden sich in einem Winkel von $60,79^\circ$.