Lösung zu den Übungen zur lineare Unabhängigkeit

Aufgabe	*Rechenweg*
1. Aufgabe a. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$	a. $\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, also linear abhängig
b. $\vec{a} = \begin{pmatrix}-8\\7\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}16\\-14\end{pmatrix}$	b. $\begin{pmatrix}-8\\7\end{pmatrix} = (-0{,}5) \cdot \begin{pmatrix}16\\-14\end{pmatrix}$, also linear abhängig
c. $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	c. $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}0 = r\\1 = 0\end{vmatrix}$; da die 2. Zeile einen Widerspruch darstellt, sind die Gleichungen nicht lösbar, also sind die Vektoren linear unabhängig
d. $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$	d. $\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$, also linear abhängig
e. Wie viele linear unabhängige Vektoren kann es in einem zweidimensionalen Raum höchstens geben?	e. Es können höchstens zwei linear unabhängige Vektoren in einem zweidimensionalen Raum geben.
2. Aufgabe a. $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}15\\-9\\-3\end{pmatrix}$	a. $3 \cdot \begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\-3\end{pmatrix}$, also linear abhängig
b. $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\18\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\-1\end{pmatrix}$	b. $\begin{vmatrix}6 = -2r\\18 = -6r\\4 = -r\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-3 = r\\-3 = r\\-4 = r\end{vmatrix}$, d.h. linear unabhängig

c. $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-11\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-7\\-4\\-2\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$	c. $\left\vert\begin{array}{c} 0=-r-7s+4t \\ 0=-3r-4s+3t \\ 0=-11r-2s-t \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I\cdot 3 \\ II\cdot 4 \\ III\cdot 12 \end{array} \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=-3r-21s+12t \\ 0=-12r-16s+12t \\ 0=-132r-24s-12t \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I+III \\ II+III \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=-135r-45s \\ 0=-144r-40s \\ 0=-132r-24s-12t \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I\cdot(-40) \\ II\cdot 45 \\ III \end{array}$ $\Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=5400r+1800s \\ 0=-6480r-1800s \\ 0=-132r-24s-12t \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I+II \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=-1080r \\ 0=-6480r-1665s \\ 0=-132r-24s-12t \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=r \\ 0=s \\ 0=t \end{array}\right\vert$, also linear unabhängig.
d. $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$	d. $\left\vert\begin{array}{c} 0=3s \\ 0=2t \\ 0=2r \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=r \\ 0=s \\ 0=t \end{array}\right\vert$ => Die Vektoren sind linear unabhängig.
e. $\vec{a} = \begin{pmatrix}16\\-12\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\8\\6\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}8\\-2\\4{,}5\end{pmatrix}$	e. $\left\vert\begin{array}{c} 0=16r+8t \\ 0=-12r+8s-2t \\ 0=3r+6s+4{,}5t \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} t=-2r \\ 0=-12r+8s-2\cdot(-2r) \\ 0=3r+6s+4{,}5\cdot(-2r) \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} t=-2r \\ 0=-12r+8s+4r \\ 0=3r+6s-9r \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} t=-2r \\ 0=-8r+8s \\ 0=-6r+6s \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I \\ II\cdot(-3) \\ III\cdot 4 \end{array}$ $\Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} t=-2r \\ 0=24r-24s \\ 0=-24r+24s \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I \\ II \\ III+II \end{array} \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} t=-2r \\ 0=24r-24s \\ 0=0 \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}$ => $\infty - viele\ Lösungen$, d.h. linear abhängig
f. $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\9\\-2\end{pmatrix}, \vec{b} = -2\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\9\end{pmatrix}, \vec{c} = 4\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$	f. $\left\vert\begin{array}{c} 0=6r-6s+12t \\ 0=9r+4r+4t \\ 0=-2r-18r+16s \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I\cdot(-4) \\ II\cdot 12 \\ III\cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=-24r+24s-48t \\ 0=108r+48r+48t \\ 0=-6r-54r+48s \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I \\ II+I \\ III+I \end{array} \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=-24r+24s-48t \\ 0=84r+72r \\ 0=-30r-30r \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I \\ II\cdot 5 \\ III\cdot 12 \end{array}$ $\Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=-24r+24s-48t \\ 0=420r+360r \\ 0=-360r-360r \end{array}\right\vert \begin{array}{c} I \\ II \\ III+II \end{array} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=-24r+24s-48t \\ 0=420r+360r \\ 0=60r \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} 0=r \\ 0=s \\ 0=t \end{array}\right\vert$, also linear unabhängig.
g. Wie viele linear unabhängige Vektoren kann es in einem dreidimensionalen Raum höchstens geben?	g. Es gibt höchstens drei linear unabhängige Vektoren in einem dreidimensionalen Raum.