Lösungen zu den Übungen zu Rotationskörpern

Aufgabe 1:

a. $f(x) = x^2$ I = [2;5]

V = $\pi \cdot \int_2^5 (x^2)^2 dx = \pi \cdot \int_2^5 x^4 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot x^5\right]_2^5 = \pi \cdot [\frac{1}{5} \cdot 5^5 - \frac{1}{5} \cdot 2^5] = \pi \cdot 618{,}6 \approx$ **1943,39**

b. $f(x) = x$ I = [−2;4]

V = $\pi \cdot \int_{-2}^4 (x)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_{-2}^4 = \pi \cdot [\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3] = \pi \cdot 24 \approx$ **75,4**

c. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x$ I = [−4;2]

V = $\pi \cdot \int_{-4}^2 \left(\frac{1}{3}x^2 + 6x\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^2 \left(\frac{1}{9}x^4 + 4x^3 + 36x^2\right) dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{45}x^5 + x^4 + 12x^3\right]_{-4}^2 = \pi \cdot [\frac{1}{45}2^5 + 2^4 + 122^3 - (\frac{1}{45}(-4)^5 + (-4)^4 + 12(-4)^3)]$

$= \pi \cdot [\frac{5072}{45} - (-\frac{24064}{45})] = \pi \cdot \frac{29136}{45} \approx$ **2034,08**

d. $f(x) = \sqrt{x+2}$ I = [0;3]

V = $\pi \cdot \int_0^3 \left(\sqrt{x+2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 (x+2) dx = \pi \cdot [0{,}5x^2 + 2x]_0^3 = \pi \cdot 10{,}5 \approx$ **32,99**

e. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ I = [1;5]

V = $\pi \cdot \int_1^5 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^5 (x^4 + 2x + \frac{1}{x^2}) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot x^5 + x^2 - x^{-1}\right]_1^5$

$= \pi \cdot (649{,}8 - 0{,}2) \approx$ **2040,78**

f. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ I = [−3; −0,5]

Vorbemerkung: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1$

V = $\pi \cdot \int_{-3}^{-0,5} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-3}^{-0,5} (x+1)^2 dx = \pi \cdot \int_{-3}^{-0,5} (x^2 + 2x + 1) dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 + x^2 + x\right]_{-3}^{-0,5} = \pi \cdot [-0{,}292 - (-3)] = \pi \cdot 2{,}708 \approx$ **8,51**

g. **f(x) = x · $\sqrt{3x+2}$ I = [4;6]**

V = $\pi \cdot \int_4^6 \left(\mathbf{x} \cdot \sqrt{\mathbf{3x+2}}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_4^6 [x^2 \cdot (3x+2)]dx = \pi \cdot \int_4^6 (3x^3 + 2x^2)dx =$

$\pi \cdot \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_4^6 = \pi \cdot (1116 - 234,\overline{6}) \approx$ **2768,79**

Aufgabe 2:

a. **f(x) = $\sqrt{x}$ g(x) = x² I = [0;1]**

Bemerkung: f(x) ≥ g(x) in I

V = $\pi \cdot \int_0^1 [(\sqrt{\mathbf{x}})^2 - (\mathbf{x^2})^2]dx = \pi \cdot \int_0^1 (x - x^4)dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \pi \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$

≈ **0,79**

b. **f(x) = 2x³ g(x) = 8x I = [0;2]**

Bemerkung: g(x) ≥ f(x) in I

V = $\pi \cdot \int_0^2 [(\mathbf{8x})^2 - (2\mathbf{x^3})^2]dx = \pi \cdot \int_0^2 (64x^2 - 4x^6)dx = \pi \cdot \left[\frac{64}{3}x^3 - \frac{4}{7}x^7\right]_0^2$

= $\pi \cdot (\frac{4096}{105}) \approx$ **122,55**

Aufgabe 3:

Berechne den Rauminhalt des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche zwischen den Graphen von f(x) = −2x² + 16 und g(x) = $x^4 + 8$ um die x-Achse rotiert, x, f(x) in cm!

Schnittpunkte berechnen:

−2x² + 16 = $x^4 + 8$ ⇔ $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ ⇔ x = $-\sqrt{2}$ v x = $\sqrt{2}$ (Substitution)

f(0) = 16 und g(0) = 8, d.h. f(x) ≥ g(x)

V = $\pi \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(-2x^2 + 16)^2 - (x^4+8)^2]dx$

= $\pi \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(4x^4 - 64x^2 + 256) - (x^8 + 16x^4 + 64)]dx$

= $\pi \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4x^4 - 64x^2 + 256 - x^8 - 16x^4 - 64]dx$

= $\pi \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [-x^8 - 12x^4 - 64x^2 + 192]dx$

= $\pi \cdot \left[-\frac{1}{9}x^9 - \frac{12}{5}x^5 - \frac{64}{3}x^3 + 192x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$ = π · [195,099 – (–195,099)] ≈ 1225,84

Der Rauminhalt beträgt 1225,84 cm³.

Aufgabe 4:

Durch die Rotation der Fläche zwischen f(x) = 2· $\sqrt{x}$ und g(x) = 0,6x + 3 um die x-Achse entsteht eine 20 cm lange Vase, x, f(x) und g(x) in cm.

a. g(20) –f(20) = 15– 8,94 = 6,06

Das Glas ist 6,06cm dick.

b. V = $\pi \cdot \int_0^{20} (2 \cdot \sqrt{x})^2] dx$

$= \pi \cdot \int_0^{20} 4x\, dx$

$= \pi \cdot [2x^2]_0^{20}$

$= \pi \cdot 800 \approx 2513{,}27$

Das Volumen beträgt 2513,27cm³.

c. $\pi \cdot \int_0^{20} [(0{,}6x + 3)^2 - (2 \cdot \sqrt{x})^2] dx$

$= \pi \cdot \int_0^{20} [0{,}36x^2 + 3{,}6x + 9 - 4x] dx$

$= \pi \cdot \int_0^{20} [0{,}36x^2 - 0{,}4x + 9] dx$

$= \pi \cdot [0{,}12x^3 - 0{,}2x^2 + 9x]_0^{20}$

$= \pi \cdot 1060 \approx 3330{,}09$

Man braucht 3330,09 cm³ Glas.

Aufgabe 5:

Die Funktion f(x) = 2x³ wird an der y-Achse rotiert. Berechne das Volumen des Rotationskörpers für 0 ≤ f(x) ≤ 16!

Umkehrfunktion: y = 2x³ => x = 2y³ ⇔ y = $\sqrt[3]{0{,}5x}$

V = $\pi \cdot \int_0^{16} \left(\sqrt[3]{0{,}5x}\right)^2 dx$

$= \pi \cdot \int_0^{16} (0{,}5x)^{\frac{2}{3}} dx$

$= \pi \cdot \left[0{,}5^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}\right]_0^{16}$

$= \pi \cdot 38{,}4 \approx 120{,}64$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt 120,64 FE³.