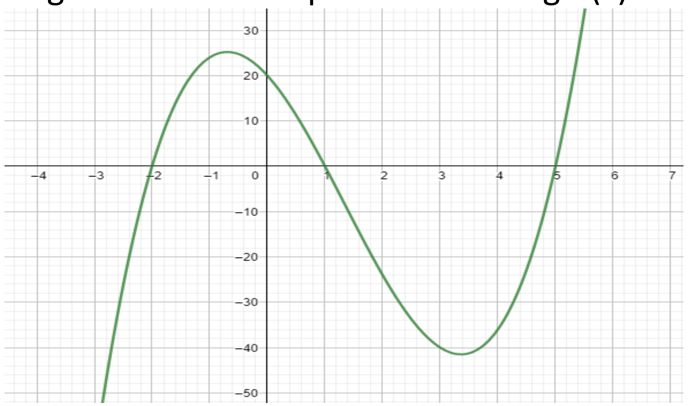
Lösungen zu den Übungen zur Monotonie

Aufgabe	Lösung
1. Gegeben ist der Graph von f(x)! Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f!	f ist monoton steigend für $x < -5$ und $0 < x < 5{,}6$ f ist monoton fallend für $x < 5{,}6$ und $-5 < x < 0$
2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie! a. $f(x) = (x-2)^2 + 6$ b. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 3$ c. $f(x) = -4x^3 + 30x^2 - 288x + 72$ d. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$ e. $f(x) = 6x^7 - 35x^6 - 420x^5$ f. $f(x) = 3x^4 + 10$ Alternativ kann man mit der geraden und ungeraden Anzahl von Nullstellen argumentieren und muss nicht so viele Werte von f'(x) ausrechnen. Zur Erinnerung: Gerade Anzahl: f' berührt die x-Achse nur, ungerade Anzahl: f geht durch die x-Achse.	a. $f'(x) = 2x - 4$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2$ $f'(0) = -4$ $f'(4) = 4$ f ist streng monoton fallend für $x < 2$, f ist streng monoton steigend für $x > 2$ b. $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $f'(0) = -4$ $f'(4) = 4$ f ist streng monoton fallend für $x < 2$, f ist streng monoton steigend für $x > 2$ c. $f'(x) = -12x^2 + 60x - 288$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ keine Lösung $f'(0) = -288 < 0$ f ist immer streng monoton fallend d. $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 72x$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = 6$ $f'(-1) = -112$ $f'(2) = 32$ $f'(4) = -32$ $f'(7) = 112$ f ist streng monoton steigend für $x \in]0; 3[$ und $x > 6$ f ist streng monoton fallend für $x \in]3; 6[$ und $x < 0$ e. $f'(x) = 42x^6 - 210x^5 - 2100x^4$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (4fache Nullstelle) $f'(-1) = -1848$ $f'(2) = -37632$ f ist immer streng monoton fallend. f. $f'(x) = 12x^3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (3fache Nullstelle) $f'(-1) = -12$ $f'(1) = 12$ f ist streng monoton steigend für $x > 0$, fallend für $x < 0$

3. Gegeben ist die Ableitungsfunktion f'(x). Bestimmen Sie die Monotonie von f(x) ohne Taschenrechner! a. $f'(x) = (x - 3)^2 \cdot (x + 5)$ b. $f'(x) = -2 \cdot (x-1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 5)$ c. $f'(x) = -7x + 21$ d. $f'(x) = x^4 + 1$	a. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (doppelte Nullstelle, d.h. f' ändert das Vorzeichen an der Stelle nicht) oder $x = -5$ (einfache Nullstelle, d.h. f' ändert an der Stelle das Vorzeichen) $f'(0) = 45 > 0$ => f ist streng monoton steigend für $x > -5$, fallend für $x < -5$ b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \vee x = 5$ $f'(0) = -30$ => f ist streng monoton fallend für $x \in]-3; 1[$ und $x > 5$ f ist streng monoton steigend für $x < -3$ und $x \in]1; 5[$. c. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $f'(0) = 21$ => f ist streng monoton steigend für $x < 3$ und fallend für $x > 3$. d. $x^4 = -1$ hat keine Lösung. Es gibt keine Nullstellen. $f'(0) = 1$ => f ist immer streng monoton steigend.
4. Gegeben ist der Graph der Ableitung f'(x)!  a. Wo ist f streng monoton steigend? b. Wo ist f monoton fallend? c. Wo liegen die lokalen Extrema von f(x)? d. Wo liegen die Wendestellen von f(x)?	a. $x \in]-2; 1[$ und für $x > 5$ b. $x > -2$ und $x \in]1; 5[$ c. Sie liegen bei $x = -2$, $x = 1$ uns $x = 5$ d. Sie liegen in den Extrema von f'(x) , also ungefähr bei $x = -0{,}7$ und 3,4.