

Lösungen zu den Textaufgaben mit Ableitung und Integralen

Denken Sie daran, dass f die momentane Änderungsrate ist, also eigentlich die Ableitung f' !

Aufgabe 1: $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 15t^2 + 200t$

a. $f(10) = 832,33$

Nach 10 Tagen werden ca. 832 Menschen neu infiziert.

b. Gesucht: Maximum von f :

$$f'(t) = t^2 - 30t + 200 \quad \text{und} \quad f''(t) = 2t - 30$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 20$$

$$f''(10) = -10 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(10) = 832 \text{ s.o.}$$

$$f''(20) = 10 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Untersuchung der Ränder: $f(0) = 0$ und $f(24) = 768$

Nach 10 Tagen infizieren sich die meisten Menschen, nämlich 832.

c. Gesucht: die Tangente an f im Punkt $P(24/f(24))$:

$$f(24) = 768 \quad m = f'(24) = 18 \Rightarrow g(t) = 18t + b$$

Einsetzen von P : $768 = 18 \cdot 24 + b \Rightarrow b = 336$

$$\Rightarrow g(t) = 18t + 336$$

$$822 = 18t + 336 \Leftrightarrow t = 27$$

Nach 27 Tagen stecken sich 822 Menschen neu an.

Aufgabe 2: $f(x) = x^4 - 14x^3 - 19x^2 + 476x + 480$

a. $f(7) = 480$

Nach 7 Tagen erhalten 480 neue Leute diese Nachricht.

b. Gesucht: Maximum der Stammfunktion F :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1 \vee x = 8 \vee x = 12$$

$$f'(x) = 4x^3 - 42x^2 - 38x + 476$$

$$f'(8) = -468 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$[f'(12) = 884 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}]$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + 1000 = 0,2x^5 - 3,5x^4 - \frac{19}{3}x^3 + 238x^2 + 480x + 1000 \text{ gibt die Anzahl der Menschen an, die die Nachricht auf ihren Geräten hat.}$$

$$F(8) = 9046,93$$

Untersuchung der Ränder: $F(0) = 1000$, $F(12,5) = 7403,65$

Nach 8 Tagen haben die meisten Menschen diese Nachricht erhalten, es sind dann 9046 Menschen.

c. Gesucht: Minimum von f :

$$f'(x) = 4x^3 - 42x^2 - 38x + 476 \text{ und } f''(x) = 12x^2 - 84x - 38$$

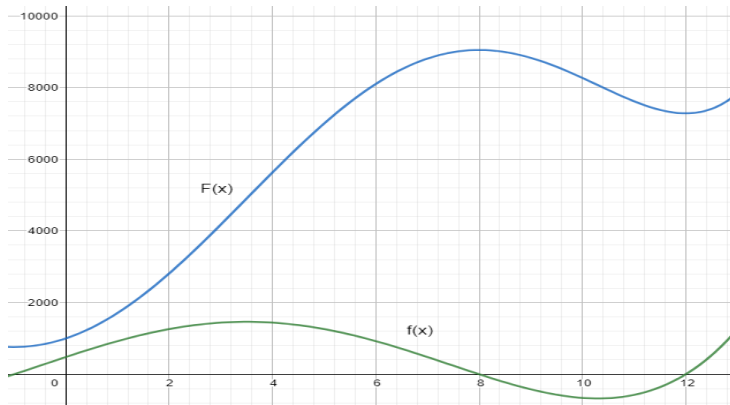
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx -3,3 \vee x = 3,5 \vee x \approx 10,3$$

$$f''(3,5) = -185 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$f''(10,3) = 369,88 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \quad f(10,3) = -676$$

Untersuchung der Ränder: $f(0) = 480$ und $f(14) = 3420$

Nach 10,3 Tagen müssen neue Nachrichten produziert werden.



Aufgabe 3: $f(x) = -0,01 \cdot x \cdot (x-6) \cdot (x-10) = -0,01x^3 + 0,16x^2 - 0,6x$

- a. $]0; 6[$: Wasser fließt ab (da $f(x) < 0$)
 $]6; 10[$: Wasser fließt zu
 ab 10: Wasser fließt ab

- b. Gesucht: Maximum von f :

$$f'(x) = -0,03x^2 + 0,32x - 0,6 \quad \text{und} \quad f''(x) = -0,06x + 0,32$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 2,43 \vee x \approx 8,24$$

$$f''(2,43) \approx 0,174 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f''(8,24) \approx -0,174 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad f(8,24) \approx 0,325$$

$$\text{Untersuchung der Ränder: } f(0) = 0 \text{ und } f(10,5) \approx -0,236$$

Die Wassermenge steigt nach 8,24 Tagen am stärksten.

- c. Gesucht: Minimum der Stammfunktion F :

Die geringste/höchste Wasserstandshöhe ist bei den Nullstellen von f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 10$$

Da $f(x) < 0$ für $x < 6$ und $f(x) > 0$ für $x > 6$ handelt es sich bei $x = 6$ um ein Minimum (VZW von $-$ nach $+$)

Alternativ: $f'(6)$ und $f'(10)$ ausrechnen.

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + 3 = -0,0025x^4 + \frac{0,16}{3}x^3 - 0,3x^2 + 3; \quad F(6) = 0,48$$

$$\text{Untersuchung der Ränder: } F(0) = 2, \quad F(10,5) \approx 1,27$$

Nach 6 Monaten ist der Wasserstand mit 0,48m am niedrigsten.

- d. $\frac{1}{10,5} \cdot \int_0^{10,5} F(x) dx \approx 1,33$

Der See ist in den ersten 10,5 Tagen im Durchschnitt 1,33m tief.

