Lösung zu Textaufgaben mit Ableitungen

Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1. Die Firma Meier bringt eine neue Schokoladensorte auf den Markt. Aus Erfahrung mit der Verkaufsentwicklung anderer, ähnlicher Produkte weiß man, dass die Funktion $f(t) = -0{,}0001t^3 + 0{,}15t^2 + 15t$, $0 \leq t \leq 1500$, die Verkaufsentwicklung gut beschreibt. (t: Zeit nach Verkaufsbeginn in Tagen, f(t): verkaufte Stückzahl pro Tag) a) Wie viele Tafeln Schokolade verkauft die Firma nach 150 Tagen? b) An welchem Tag werden die meisten Schokoladen verkauft? c) Mit den Großhändlern ist vereinbart, dass der Lagerbestand erhöht wird, wenn die Zunahme der täglichen Verkaufszahlen am größten ist. Wann tritt dies ein?	a) $f(150) = -0{,}0001 \cdot 150^3 + 0{,}15 \cdot 150^2 + 15 \cdot 150 = 5287{,}5$ b) Gesucht ist das Maximum: $f'(t) = -0{,}0003t^2 + 0{,}3t + 15$ und $f''(t) = -0{,}0006t + 0{,}3$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}0003t^2 + 0{,}3t + 15 = 0 \Leftrightarrow t \approx -47{,}72 \vee t = 1047{,}72$ ist nicht im gesuchten Bereich $f''(1047{,}72) \approx -0{,}329 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(1047{,}72) = 65363{,}4$ Untersuchung der Ränder: $f(0) = 0$ und $f(1500) = 22500 < 65363{,}4$ c) Gesucht ist der Wendepunkt (mit maximaler Steigung): $f''(t) = -0{,}0006t + 0{,}3$ und $f'''(t) = -0{,}0006$ $f''(t) = -0{,}0006t + 0{,}3 = 0 \Leftrightarrow 0{,}0006t = 0{,}3 \Leftrightarrow t = 500$ $f'''(500) = -0{,}0006 < 0 \Rightarrow$ maximale Steigung [Untersuchung der Ränder: $f'(500) = 90$; $f'(0) = 15$; $f'(1500) = -210$]	Es werden 5287 Tafeln Schokolade verkauft. Die meisten Tafeln Schokolade werden am 1047. Tag verkauft. Nach 500 Tagen ist die Zunahme der Verkaufszahlen am größten.
2. Ein Surfshop verkauft neue Surfbretter. Der Verkauf kann in den ersten 2 Jahren modelliert werden durch die Funktion $f(x) = 0{,}8x^3 - 30x^2 + 300x$, x in Monaten, $0 \leq x \leq 24$ und f(x) in verkauften Surfbrettern. a) Wie viele Surfbretter verkauft der Laden drei Monaten nach der Einführung des Produktes? b) Wann verkauft er die meisten Surfbretter? c) Der Surfshop will zu dem Zeitpunkt seine Werbung verstärken, wenn der Verkauf von	a) $f(3) = 651{,}6$ b) Gesucht: Maximum $f'(x) = 2{,}4x^2 - 60x + 300$ und $f''(x) = 4{,}8x - 60$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 6{,}9 \vee x \approx 18{,}09$ $f''(6{,}9) \approx -26{,}88 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f''(18{,}09) \approx 26{,}83 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(6{,}9) \approx 904{,}51$ Betrachtung der Ränder: $f(0) = 0$; $f(24) = 979{,}2 > 904{,}51$! c) Gesucht: Wendepunkt (mit geringster Steigung) $f''(x) = 4{,}8x - 60$ und $f'''(x) = 4{,}8$	Drei Monate danach verkauft der Laden 651 Surfbretter. Die meisten Surfbretter werden nach 24 Monaten verkauft. Dann werden 979 Surfbretter verkauft.

Surfbrettern am geringsten steigt. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt! d) Der Surfshop macht Gewinn, wenn er mindestens 600 Surfbretter verkauft. Berechnen Sie den Zeitraum, zu dem der Laden Verlust macht!	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow = 4{,}8x - 60 \Leftrightarrow x = 12{,}5$ $f'''(12{,}5) = 4{,}8 > 0$ => minimalste Steigung $f'(12{,}5) = -75$ Betrachtung der Ränder: $f'(0) = 300$; $f'(24) = 242{,}4$ d) $f(x) = 600 \Leftrightarrow 0{,}8x^3 - 30x^2 + 300x = 600$ $\Leftrightarrow 0{,}8x^3 - 30x^2 + 300x - 600 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 2{,}65 \vee x \approx 12{,}83 \vee x \approx 22{,}01$ $f(10) \approx 800 > 600$ $f(20) \approx 400 < 600$	Nach 12,5 Monaten muss die Werbung geschaltet werden. Der Laden macht zwischen 0 und 2,65 und zwischen 12,83 und 22,01 Monaten Verlust.
3. An einem stürmischen Wettertag wird der Wind in der Zeit von 9 Uhr bis 14 Uhr modelliert durch die Funktion $f(x) = 0{,}25x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8{,}5x^2 + 15x + 50$, x in vergangenen Stunden (seit 9 Uhr), f(x) in km/h. a) Berechnen Sie, wie stark ist der Wind um 11 Uhr ist! b) Berechnen Sie, wann ist der Wind am schwächsten ist! c) Berechnen Sie, wann nimmt der Wind am stärksten zunimmt!	a) 9 Uhr: x = 0 11 Uhr: x = 2 $f(2) = 52{,}\overline{6}$ b) Gesucht ist das Minimum! $f'(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$ und $f''(x) = 3x^2 + 2x - 17$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ $\Leftrightarrow x = -5\ (\notin D(f)) \vee x = 1 \vee x = 3$ $f''(1) = -12 < 0$ => Maximum $f''(3) = 16 > 0$ => Minimum $f(3) = 47{,}75$ Betrachtung der Ränder: $f(0) = 50 > f(3)$ $f(5) \approx 110{,}42 > f(3)$ c) Gesucht: Wendepunkt (mit maximaler Steigung) $f''(x) = 3x^2 + 2x - 17$ und $f'''(x) = 6x + 2$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 17 = 0$ $\Leftrightarrow x \approx -2{,}73 (\notin D(f)) \vee x \approx 2{,}07$ $f'''(2{,}07) = 14{,}42 > 0$ => minimale Steigung d.h. die maximale Steigung liegt in den Rändern: $f'(0) = 15$ $f'(5) = 80$	Der Wind ist weht um 11 Uhr mit einer Geschwindigkeit von $52{,}\overline{6}$ km/h. Der Wind ist um 12 Uhr mit 47,75 km/h am schwächsten. Der Wind nimmt am stärksten um 14 Uhr zu.