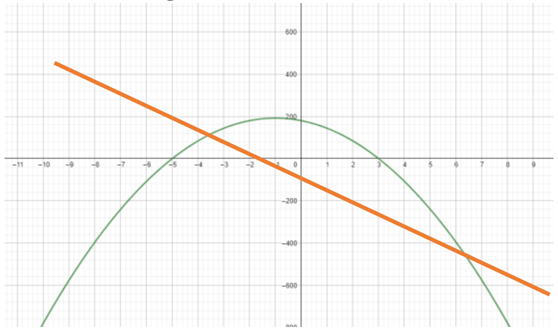
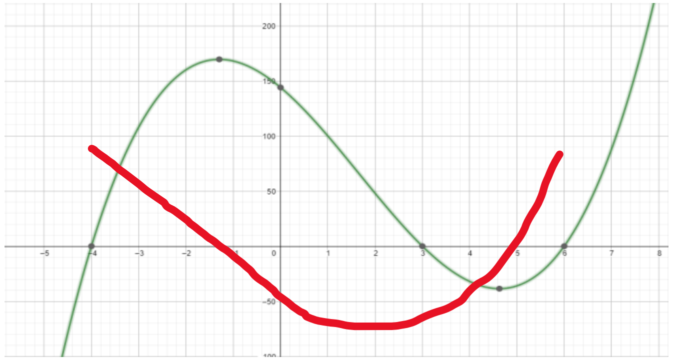
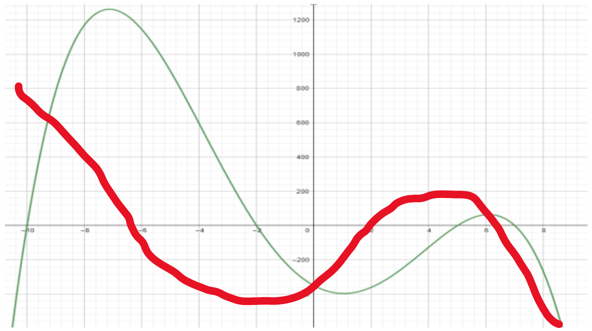
Lösungen zur Übungsklausur Mathe Differentialrechnung (bis zu Extrema)

1. Zeichnen Sie den (ungefähren) Verlauf der Ableitungsfunktion! 	 
2. Berechnen Sie näherungsweise die Ableitung von $f(x) = x^3 + 3x$ an der Stelle $x_0 = 2$ mithilfe des Differenzenquotienten für $h \to 0$!	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(2+h)^3+3\cdot(2+h)-(2^3+3\cdot 2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{2^3}+3\cdot 2^2\cdot h+3\cdot 2\cdot h^2+h^3+\cancel{6}+3\cdot h-\cancel{8}-\cancel{6}}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{12\cdot h+6h^2+h^3+3\cdot h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(12 + 6h + h^2 + 3) =$ **15**
3. a. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion $f(x) = 5x^4 + 4x^2 + 3x + 10$ im Intervall $[-4;6]$! b. Erklären Sie den Begriff der momentanen Änderungsrate und den Unterschied zwischen momentaner und mittlerer Änderungsrate!	a. $\frac{f(6)-f(-4)}{6-(-4)} = \frac{6625-1342}{10} =$ **531** b. Die momentane Änderungsrate ist definiert als $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_{0+h})-f(x_0)}{h}$; sie gibt die Steigung der Tangente an f in x_0 an und damit die Steigung des Graphen von f in x_0. Die mittlere Änderungsrate in einem Intervall $[x_0;x_0+h]$ ist definiert als $\frac{f(x_{0+h})-f(x_0)}{h}$. Sie gibt die Steigung der Sekanten an, die durch $P(x_0/f(x_0))$ und $P(x_0+h\ /f(x_0+h))$ geht.
4. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung! a. $f(x) = -6x^8 + 9x^4 - 3x^3 + 7x$ b. $f(x) = -7x^3 + 4x^2 + 6x + 8$ c. $f(x) = 12$ d. $f(t) = -4t^3 + 6tx + x^2$ e. $f(a) = 4x^2 + 4ax + a^3$	a. $f'(x) = -48x^7 + 36x^3 - 9x^2 + 7$ $f''(x) = -336x^6 + 108x^2 - 18x$ b. $f'(x) = -21x^2 + 8x + 6$ $f''(x) = -42x + 8$ c. $f'(x) = 0$ $f''(x) = 0$ d. $f'(t) = -12t^2 + 6x$ $f''(t) = -24t$ e. $f'(a) = 4x + 3a^2$ $f''(x) = 6a$

www.matheportal.com www.matheportal.wordpress.com

5.a. Untersuchen Sie $f(x) = -x^4 + 50x^2 - 4$ auf Extrema! b. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) im $x_0 = 2$ auf!	a. $f'(x) = -4x^3 + 100x$ $f''(x) = -12x^2 + 100$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 100x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-4x^2 + 100) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor 4x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5 \lor x = -5$ $f''(0) = 100 > 0$ => Minimum $f(0) = -4$ **TP (0/– 4)** $f''(-5) = -200 < 0$ => Maximum $f(-5) = 621$ **HP (–5/621)** $f''(5) = -200$ => Maximum $f(5) = 621$ **HP (5/621)** b. $f'(2) = 168$ $f(2) = 180$ => $t(x) = 168x + b$ P einsetzen: $180 = 168 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 180 - 336 = -156$ => **t(x) = 168x –156**
6. Nach der Einnahme einer Schmerztablette verläuft die Konzentration f des Wirkstoffs gemäß der Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 120x + 90$. (x: Zeit in Stunden seit der Einnahme; f: Konzentration im Blut in $\mu g/l$) a. Wie hoch ist die Konzentration eine Stunde nach der Einnahme? b. Berechnen Sie, wann der Patient 500 $\mu g/l$ des Wirkstoffes im Blut hat! c. Berechnen Sie, wie hoch die Maximal-konzentration ist und wann sie erreicht wird! d. Nach 15 Stunden baut sich die Konzentration linear ab und kann durch die Funktion g(x) modelliert werden. Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion g(x) und bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem laut der Modellfunktion kein Wirkstoff mehr im Blut des Patienten ist!	a. $f(1) = 218$ **Nach einer Stunde sind 218 $\mu g/l$ Wirkstoff im Blut.** b. $-x^3 + 9x^2 + 120x + 90 = 500 \Leftrightarrow -x^3 + 9x^2 + 120x - 410 = 0 \Leftrightarrow x \approx -9{,}11 \lor x \approx 2{,}97 \lor x \approx 15{,}14$ **Nach ca 2,97 und 15,14 Stunden sind noch 500 $\mu g/l$ Wirkstoff im Blut.** c. $f'(x) = -3x^2 + 18x + 120$ $f''(x) = -6x + 18$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x + 120 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \lor x = 10$ $f''(10) = -42 < 0$ => Maximum $f(10) = 1190$ **Die Maximalkonzentration wird nach 10 Stunden mit 1190 $\mu g/l$ Wirkstoff im Blut erreicht.** d. Gesucht: Tangente $f'(15) = -285$ $f(15) = 540$ => $t(x) = -285x + b$ P einsetzen: $540 = -285 \cdot 15 + b \Leftrightarrow b = 540 + 4275 = 4815$ => **t(x) = –285x + 4815** $-285x + 4815 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4815}{285} \approx 16{,}89$ **Nach ca 16,89 Stunden ist der Wirkstoff komplett abgebaut.**