Lösungen zu den Übungen zur Ableitung mit der h-Methothode

Aufgabe	Lösung
1. Berechne die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 mit der h-Methode! a. $f(x) = 6x + 1$ $\quad x_0 = 2$ b. $f(x) = x^2$ $\quad x_0 = 3$ c. $f(x) = 2x^3$ $\quad x_0 = -1$ d. $f(x) = -x^2 + 4$ $\quad x_0 = -4$ e. $f(x) = -4x^4 + 2x$ $\quad x_0 = 1$	a. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{6\cdot(2+h)+1-[6\cdot 2+1]}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{12+6h+1-12-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{6h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 6 = \mathbf{6}$ b. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6+h) = \mathbf{6}$ c. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cdot(-1+h)^3-2\cdot(-1)^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cdot[(-1)^3+3(-1)^2h+3(-1)h^2+h^3]+2}{h}$ 0 $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{-2+6h-6h^2+2h^3+2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{6h-6h^2+2h^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6-6h+2h^2) = \mathbf{6}$ d. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-(-4+h)^2+4-[-(-4)^2+4]}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-(16-8h+h^2)+4-[-16+4]}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-16+8h-h^2+4-[-12]}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{8h-h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(8-h) = \mathbf{8}$ e. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-4(1^4+4\cdot 1^3h+6\cdot 1^2\cdot h^2+4\cdot 1\cdot h^3+h^4)+2\cdot(1+h)-(-4\cdot 1^4+2\cdot 1)}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-4-16h-24h^2-16h^3-4h^4+2+2h-(-4+2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-16h-24h^2-16h^3-4h^4+2h}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-14h-24h^2-16h^3-4h^4}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-14-24h-16h^2-4h^3) = \mathbf{-14}$
2. Berechne $f'(x_0)$ für allgemeine x_0 mit der h-Methode! a. $f(x) = -2x^3$ b. $f(x) = 3x^2 - 6$ c. $f(x) = 4x^5$	a. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-2(x_0+h)^3-(-2(x_0)^3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-2\left(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3\right)+2(x_0)^3}{h}$ $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{-2x_0^3-6x_0^2h-6x_0h^2-2h^3+2(x_0)^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{-6x_0^2h-6x_0h^2-2h^3}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}(-6x_0^2-6x_0h-2h^2) = \mathbf{-6x_0^2}$

	b. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{3(x_0+h)^2-6-[3(x_0)^2-6]}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{3x_0^2+6x_0h+3h^2-6-3(x_0)^2+6}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{6x_0h+3h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6x_0+3h) = \mathbf{6x_0}$ c. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{4(x_0+h)^5-4(x_0)^5}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{4\cdot({x_0}^5+5{x_0}^4h+10{x_0}^3h^2+10{x_0}^2h^3+5x_0h^4+h^5)-4\cdot(x_0)^5}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{4\cdot{x_0}^5+20\cdot{x_0}^4h+40\cdot{x_0}^3h^2+40\cdot{x_0}^2h^3+20\cdot x_0h^4+4\cdot h^5-4(x_0)^5}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{20{x_0}^4h+40{x_0}^3h^2+40{x_0}^2h^3+20x_0h^4+4h^5}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}(20\cdot {x_0}^4+40\cdot {x_0}^3h+40\cdot {x_0}^2h^2+20\cdot x_0h^3+4\cdot h^4) = \mathbf{20\cdot {x_0}^4}$
3. Berechne die Ableitung von f(x) = x^n für allgemeine x_0 mit der h-Methode!	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n-{x_0}^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{{x_0}^n+n{x_0}^{n-1}h+Zahl\cdot{x_0}^{n-2}h^2\ldots+h^n-{x_0}^n}{h} =$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{n{x_0}^{n-1}h++Zahl\cdot{x_0}^{n-2}h^2\ldots+h^n}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(n\cdot {x_0}^{n-1}+\underbrace{Zahl\cdot {x_0}^{n-2}\cdot h+\cdots..+h^{n-1}}) = \mathbf{n\cdot {x_0}^{n-1}}$ Da alle diese Summanden mindestens ein h enthalten, streben sie gegen 0.