

Lösungen zum Rechnen mit Vektoren

1. Vereinfachen Sie!

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

d. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

2. Berechnen Sie:

a. $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -24 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. $6 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 30 \\ -54 \end{pmatrix}$

d. $(-3) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix}$

e. $6 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + (-6) \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -42 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -44 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 \\ 36 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -48 \end{pmatrix}$

3. Vereinfachen Sie!

a. $2\vec{a} + 7\vec{a} - \vec{a} = 8\vec{a}$

b. $3\vec{a} + 17\vec{a} - 9\vec{a} = 11\vec{a}$

c. $3\vec{a} + 10\vec{b} - 5\vec{b} + 23\vec{a} + 17\vec{b} - 9\vec{b} = 26\vec{a} + 13\vec{b}$

d. $5(2\vec{a} - 3\vec{b} - 9\vec{c}) - 6(-2\vec{b} + 7\vec{c} - 9\vec{a})$
 $= 10\vec{a} - 15\vec{b} - 45\vec{c} + 12\vec{b} - 42\vec{c} + 54\vec{a} = 64\vec{a} - 3\vec{b} - 87\vec{c}$

4. Suchen Sie Zahlen $r, s \in \mathbb{R}^{\neq 0}$, so dass der Vektor \vec{a} als Linearkombination der Vektoren \vec{b} und \vec{c} geschrieben werden kann, d.h. $\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$!

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 4 = 2r - 5s \\ 3 = 3r - 9s \\ -2 = \frac{2}{7}r - 2s \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1,5)} \begin{cases} -6 = -3r + 7,5s \\ 3 = 3r - 9s \\ -3 = -1,5s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \frac{2}{7}r - 2s \\ 3 = 3r - 9 \cdot 2 \Rightarrow r = 7 \\ s = 2 \end{cases}$$

Überprüfen in der noch nicht benutzten Gleichung (unbedingt notwendig!):

$$-2 = \frac{2}{7} \cdot 7 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow -2 = 2 - 4 \checkmark$$

d.h. $\vec{a} = 7\vec{b} + 2\vec{c}$

b. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2 = -3r - 7s \\ 2 = 4r + 7s \\ 4 = 8r + 14s \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1,5)} \begin{cases} 4 = r \\ 2 = 4 \cdot 4 + 7s \\ 4 = 8r + 14s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = r \\ s = -2 \\ 4 = 8 \cdot 4 + 14 \cdot (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = r \\ s = -2 \\ 4 = 32 - 28 \end{cases}$$

d.h. $\vec{a} = 4\vec{b} - 2\vec{c}$

c. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 24 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -9 = 5r + 24s \\ 9 = -6r - 9s \\ -12 = -4r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 = 5r + 24s \\ 9 = -6 \cdot 3 - 9s \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 = 5 \cdot 3 + 24 \cdot (-3) \\ s = -3 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 = -57 \text{ falsch} \\ s = -3 \\ r = 3 \end{cases}$$

d.h. es gibt keine Zahlen, der Vektor \vec{a} kann nicht als Linearkombination der Vektoren \vec{b} und \vec{c} geschrieben werden

d. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{15}{6} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 7 = r - 2s \\ 5 = 2r - \frac{15}{6}s \\ -9 = 3r - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21 = -3r + 6s \\ 5 = 2r - \frac{15}{6}s \\ -9 = 3r - s \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1,5)} \begin{cases} -21 = -3r + 6s \\ -30 = 5s \Leftrightarrow s = -6 \\ -9 = 3r - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21 = -3r + 6s \\ 5 = 2r - \frac{15}{6} \cdot (-6) \\ s = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21 = -3 \cdot (-5) + 6 \cdot (-6) \\ r = -5 \\ s = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21 = 15 - 36 \checkmark \\ r = -5 \\ s = -6 \end{cases}$$

d.h. $\vec{a} = -5\vec{b} - 6\vec{c}$

5. Drücken Sie die Strecken \overrightarrow{FC} , \overrightarrow{CH} , \overrightarrow{EC} , \overrightarrow{BH} , \overrightarrow{EB} und \overrightarrow{HF} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aus!

$$\overrightarrow{FC} = -\vec{c} + \vec{b}$$

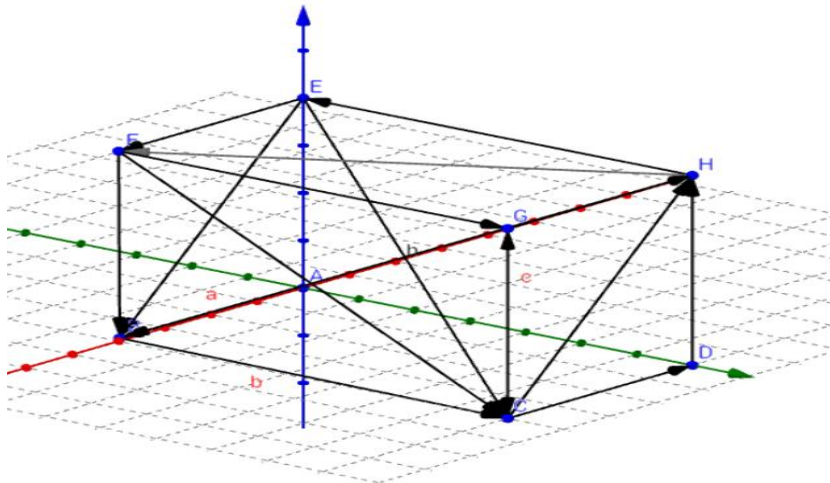
$$\overrightarrow{CH} = -\vec{a} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{EC} = -\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BH} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$$

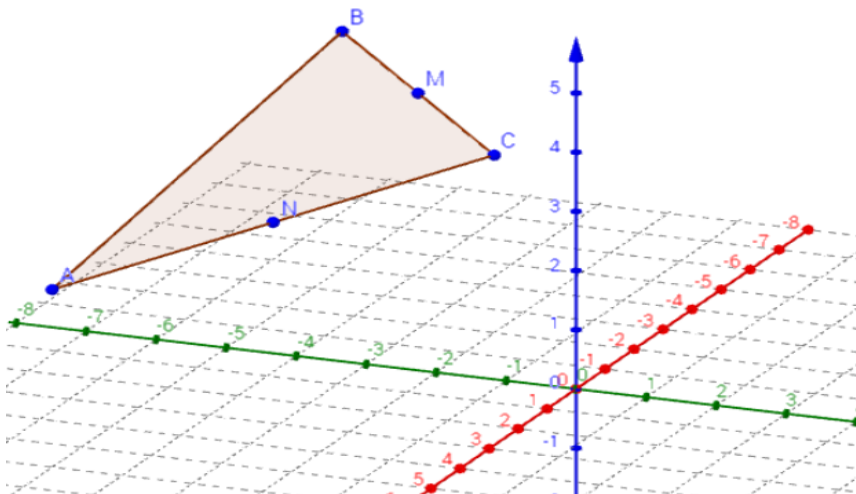
$$\overrightarrow{EB} = -\vec{c} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{HF} = -\vec{b} + \vec{a}$$



6. Gegeben ist $A(6, -5, 3)$, $B(-4, -5, 4)$ und $C(-2, -2, 3)$.

- Berechnen Sie die Strecken \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} und \overrightarrow{AC} !
- M ist der Mittelpunkt der Strecke \overrightarrow{BC} und N der Mittelpunkt der Strecke \overrightarrow{AC} . Berechnen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M und N!
- Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes des Dreiecks!



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + 0,5 \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + 0,5 \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3,5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad M(-3/-3,5/3,5) \text{ und } N(2/-3,5/3)^*$$

Schwerpunkt: $\vec{s} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -9 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

*Abkürzung bei Mittelpunkten:

Mittelpunkt zwischen der Strecke \overline{CB}

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + 0,5 \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{c} + 0,5 (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{c} + 0,5 \vec{b} - 0,5 \vec{c} = 0,5 \vec{b} + 0,5 \vec{c} = 0,5 (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\text{Also: } \overrightarrow{OM} = 0,5 \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0,5 \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$