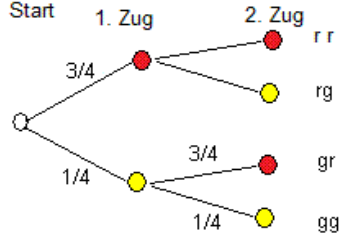
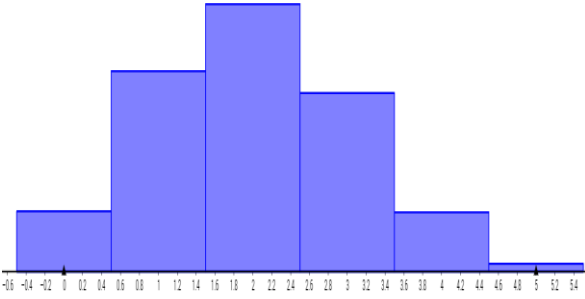


Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für das Abitur

Begriff	Definition	Beispiel																
Ergebnis	Ausgang eines Zufallsexperimentes	bei einem Würfel: {6}																
Ereignis	Menge/Zusammenfassung von Ergebnissen	bei einem Würfel: {2,4,6}																
Ergebnisraum	Menge aller möglichen Ergebnisse	bei einem Würfel: {1,2,3,4,5,6}																
mehrstufige Zufallsexperimente	<p>Mehrstufige Zufallsexperimente können durch ein Baumdiagramm dargestellt werden.</p> <p>Pfadregel 1: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.</p> <p>Pfadregel 2: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe aller Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade.</p>	<p>Urne mit 6 roten und 2 gelben Kugeln; 2maliges Ziehen mit Zurücklegen</p> $P(\text{eine rote und eine gelbe Kugel}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$ 																
bedingte Wahrscheinlichkeit/ Vierfeldtafeln	$P_B(A)$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B	<p>In einer Firma arbeiten 45 % Frauen und 55 % Männer. 60% der Frauen und 10% der Männer arbeiten halbtags. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Halbtagskraft weiblich ist?</p> $P = \frac{0,27}{0,325} = 0,8307, \text{ d.h. sie ist } 83,07\%.$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Frauen</th> <th>Männer</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>halbe Stelle</td> <td>$0,45 \cdot 0,6 = 0,27$</td> <td>$0,55 \cdot 0,1 = 0,055$</td> <td>0,325</td> </tr> <tr> <td>ganze Stelle</td> <td>$0,45 \cdot 0,4 = 0,18$</td> <td>$0,55 \cdot 0,9 = 0,495$</td> <td>0,675</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0,45</td> <td>0,55</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		Frauen	Männer		halbe Stelle	$0,45 \cdot 0,6 = 0,27$	$0,55 \cdot 0,1 = 0,055$	0,325	ganze Stelle	$0,45 \cdot 0,4 = 0,18$	$0,55 \cdot 0,9 = 0,495$	0,675		0,45	0,55	1
	Frauen	Männer																
halbe Stelle	$0,45 \cdot 0,6 = 0,27$	$0,55 \cdot 0,1 = 0,055$	0,325															
ganze Stelle	$0,45 \cdot 0,4 = 0,18$	$0,55 \cdot 0,9 = 0,495$	0,675															
	0,45	0,55	1															

Zufallsgröße X	X ist eine Größe, die jedem Ereignis eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zuordnet.	X = Augensumme bei 2maligem Würfeln
X = a	beschreibt das Ereignis a, dessen Ergebnisse alle dazu führen, dass die Zufallsgröße X den Wert a annimmt	X = 6 bedeutet die Augensumme 6, d.h. die Würfe (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1); es gehören also 5 Ergebnisse dazu
P(X = a)	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses a (das die Zufallsgröße X annimmt)	X = Augensumme bei 2maligem Würfeln $P(X = 6) = \frac{5}{36}$
$\mu = E(X)$ Erwartungswert einer Zufallsgröße	$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$ E gibt an, mit welchem Wert man langfristig rechnen kann.	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 2maligem Ziehen mit Zurücklegen; Ergebnisse: 0,1,2 rote Kugeln $E(X) = 0 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + 1 \cdot \left[\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \right] + 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0,8$
$\sigma(X)$ Standardabweichung einer Zufallsgröße	$\sigma(X) = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)}$ σ gibt an, wie weit die Werte liegen.	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 2maligem Ziehen mit Zurücklegen $\sigma(X) = \sqrt{(0 - 0,8)^2 \cdot \frac{36}{100} + (1 - 0,8)^2 \cdot \frac{48}{100} + (2 - 0,8)^2 \cdot \frac{16}{100}} \approx 0,693$
$\mu = E(X)$ Erwartungswert einer Versuchsreihe	$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ μ ist der normale Mittelwert.	
$\sigma(X)$ Standardabweichung einer Versuchsreihe	$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot [(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2]}$	

<p>Bernoulli-Versuch</p> <p>Bernoulli-Kette</p>	<p>Bei einem Bernoulli-Versuch gibt es nur zwei Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse sind bei beliebiger Wiederholung immer gleich.</p> <p>Eine Bernoulli-Kette ist ein n-mal durchgeführter Bernoulli-Versuch.</p>	<p>Urnenversuche mit 2 verschiedenen Kugeln und mit Zurücklegen</p>														
<p>Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Binomialverteilungen</p>	<p>Verteilung der Zufallsgröße X einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p und genau k Treffern: $P(X = k)$</p> $B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ <p>mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$</p>	<p>Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln</p> <p>X = Anzahl der roten Kugeln bei 5maligem Ziehen mit Zurücklegen</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit von genau 2 roten Kugeln ist:</p> $B_{5,0,4}(2) = \binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 \approx 0,3456$ <p>Taschenrechner: BinomPdf (Menü 5,5,D) und nCr (Menü 5,1)</p>														
<p>kumulierte Binomialverteilung</p>	<p>Verteilung der Zufallsgröße X einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p und 0 bis k Treffern: $P(X \leq k)$</p> $F_{n,p}(k) = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{n-k} + \dots + \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$	<p>Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln</p> <p>X = Anzahl der roten Kugeln bei 5maligem Ziehen mit Zurücklegen</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit von höchstens 2 roten Kugeln ist:</p> $F_{5,0,4}(2) = \binom{5}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 \approx 0,683$ <p>Taschenrechner: BinomCdf (Menü 5,5,E)</p>														
<p>Binomialverteilung</p>	<p>Gegeben ist eine n-stufige Bernoulli-Kette mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: <i>Anzahl der Erfolge</i> heißt Binomialverteilung. Sie wird durch ein Histogramm dargestellt.</p> 	<p>Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln</p> <p>X = Anzahl der roten Kugeln bei 5maligem Ziehen mit Zurücklegen</p> <table border="1" data-bbox="1167 954 1462 1219"> <thead> <tr> <th>Treffer k</th> <th>$B_{5,0,4}(k)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0,0776</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,2592</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,3456</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0,2304</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0,0768</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0,01024</td> </tr> </tbody> </table>	Treffer k	$B_{5,0,4}(k)$	0	0,0776	1	0,2592	2	0,3456	3	0,2304	4	0,0768	5	0,01024
Treffer k	$B_{5,0,4}(k)$															
0	0,0776															
1	0,2592															
2	0,3456															
3	0,2304															
4	0,0768															
5	0,01024															

Erwartungswert von Bernoulli-Ketten	Erwartungswert der Zufallsgröße X einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p: $\mu = E(X) = n \cdot p$	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 2maligem Ziehen mit Zurücklegen $E(X) = 2 \cdot \frac{4}{10} = 0,8$
Standardabweichung von Bernoulli-Ketten	Standardabweichung der Zufallsgröße X einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 2maligem Ziehen mit Zurücklegen $\sigma(X) = \sqrt{2 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 0,693$
Sigmaregeln für binomialverteilte Zufallsgrößen	$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 68,3\%$ $P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 90\%$ $P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 95\%$ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,4\%$ $P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 99\%$ $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$ Die Regeln gelten für $\sigma > 3$.	Urne mit 6 blauen und 4 roten Kugeln X = Anzahl der roten Kugeln bei 100maligem Ziehen mit Zurücklegen In welchem Intervall liegen 99% aller Werte von X? $\mu = 100 \cdot 0,4 = 40$ $\sigma(X) = \sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 4,899$ $[\mu - 2,58\sigma; \mu + 2,58\sigma] = [40 - 2,58 \cdot 4,899; 40 + 2,58 \cdot 4,899]$ $= [27,36; 52,64]$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% liegt die Anzahl X der roten Kugeln bei 100maligem Ziehen zwischen 28 und 52 Kugeln.
Konfidenzintervall	gegeben: 1. eine Stichprobe einer Bernoulli-Kette mit der Länge n und der Trefferzahl k; 2. Sicherheitswahrscheinlichkeit (σ -Regel) gesucht: verträgliche Wahrscheinlichkeit p (Intervall)	Bei einem Würfelspiel werden 30 Sechsen bei 100 Versuchen erzielt. Welche Erfolgswahrscheinlichkeiten sind mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,4% mit dem Stichprobenergebnis vereinbar? $\mu - 2\sigma \leq 30 \leq \mu + 2\sigma$ $30 = \mu \pm 2\sigma$ $30 = 100 \cdot p \pm 2 \cdot \sqrt{100 \cdot p \cdot (1 - p)}$ $\Leftrightarrow 100 \cdot p - 30 = \pm 2 \cdot \sqrt{100 \cdot p \cdot (1 - p)} / :100$ $\Leftrightarrow p - 0,3 = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{100}} / ()^2 \Leftrightarrow (p - 0,3)^2 = 4 \cdot \frac{p \cdot (1 - p)}{100}$ $\Leftrightarrow p^2 - 0,6p + 0,09 = 0,04p - 0,04p^2 \Leftrightarrow 1,04p^2 - 0,64p + 0,09 = 0$ $\Leftrightarrow p_1 \approx 0,2175 \vee p_2 \approx 0,3978$ $I = [0,2175; 0,3978]$