Lösungen zu den Übungen zu stochastischen Übergangsmatrizen

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Lösung</th></tr>
<tr><td>

1. In einem Dorf gibt es zwei Kneipen. Zu Beginn gehen 30% regelmäßig in die Kneipe A, 25 % in die Kneipe B und 45% gehen in keine der beiden Kneipen. Die folgende Übergangstabelle zeigt die Wanderung der Kneipenbesucher pro Monat.

<table>
<tr><th>von
nach</th><th>A</th><th>B</th><th>K</th></tr>
<tr><td>A</td><td>0,4</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0,25</td><td>0,6</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>K</td><td>0,35</td><td>0,2</td><td>0,7</td></tr>
</table>

a. Berechnen Sie die Verteilung der Kneipenbesucher nach einem Monat!

b. Berechnen Sie die Verteilung der Kneipenbesucher nach vier Monaten!

</td><td>

a. $$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,6 & 0,2 \\ 0,35 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,25 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,45 \\ 0,25 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot 0,45 \\ 0,35 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,25 + 0,7 \cdot 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,215 \\ 0,315 \\ 0,47 \end{pmatrix}$$

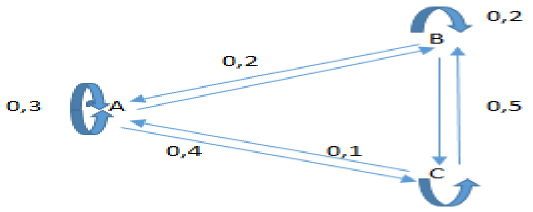
Nach einem Monat besuchen 21,5% die Kneipe A, 31,5% die Kneipe B und 47% gehen in keine der beiden Kneipen.

b. $$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,6 & 0,2 \\ 0,35 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}^4 \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,25 \\ 0,45 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,192193 \\ 0,347424 \\ 0,460384 \end{pmatrix}$$

Nach vier Monaten besuchen ca. 19,22% die Kneipe A, 34,74% die Kneipe B und 46,04% gehen in keine der beiden Kneipen.

</td></tr>
<tr><td>

2. Gegeben ist ein Prozessdiagramm, in dem die Übergangswahrscheinlichkeiten fehlen.
   a. Berechnen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten!
   b. Stellen Sie eine Übergangsmatrix auf!



</td><td>

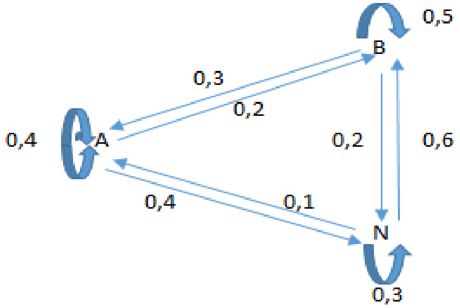
a.

<table>
<tr><th>von
nach</th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>A</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0,4</td><td>0,6</td><td>0,4</td></tr>
</table>

b. $$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

</td></tr>
</table>

3. Bei einem Referendum gaben 20% ihre Stimme der Position A, 25% der Position B und 55% beteiligten sich nicht an der Abstimmung. Da eine Wahlbeteiligung von 50% zwingend ist, wird das Referendum nach einem Jahr wiederholt. Der Wechsel der Wählerstimmer pro Jahr ist wie folgt:



Welche Partei hat nach einem Jahr die meisten Stimmen? Ist die Abstimmung diesmal gültig?

von nach	A	B	N
A	0,4	0,3	0,1
B	0,2	0,5	0,6
N	0,4	0,2	0,3

$$\begin{pmatrix}0,4&0,3&0,1\\0,2&0,5&0,6\\0,4&0,2&0,3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,2\\0,25\\0,55\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,21\\0,495\\0,295\end{pmatrix}$$

Nach einem Jahr bekommt die Position B mit 49,5% die meisten Stimmen; 29,5% haben nicht gewählt, d.h. die Abstimmung ist gültig.

4. In einem Waldgebiet leben Rehe, die jede Woche ihr Revier ändern. Zu Beginn leben 30% im Gebiet A, 45 % im Gebiet B und 25% im Revier C. Die folgende Übergangstabelle zeigt die Wanderung der Tiere:

von nach	A	B	C
A	0,2	0,3	0,4
B	0,45	0,5	
C	0,35		0,3

a. Berechnen Sie die Verteilung der Rehe nach einer Woche!
b. Wie sieht es nach 6 Wochen aus?

a. $$\begin{pmatrix}0,2&0,3&0,4\\0,45&0,5&0,3\\0,35&0,2&0,3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,3\\0,45\\0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,295\\0,435\\0,27\end{pmatrix}$$

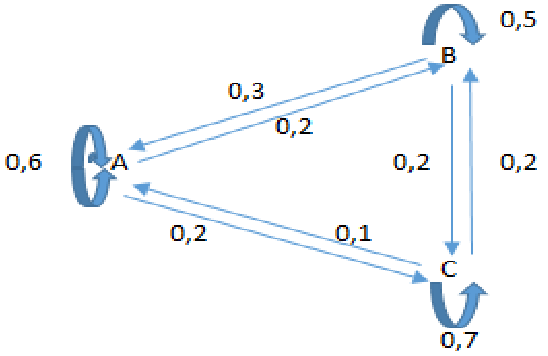
Nach einer Woche leben 29,5% der Rehe im Revier A, 43,5% im Revier B und 27% im Revier C.

b. $$\begin{pmatrix}0,2&0,3&0,4\\0,45&0,5&0,3\\0,35&0,2&0,3\end{pmatrix}^6\cdot\begin{pmatrix}0,3\\0,45\\0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,297436\\0,43077\\0,271795\end{pmatrix}$$

Ca. 29,74 % der Rehe leben nach 6 Wochen im Revier A, 43,08% im Revier B und 27,18% im Revier C.

5. Ein Restaurant bietet täglich drei Menüs an. Jeden Tag gibt es Menü A mit Fleisch, Menü B mit Fisch und Menü C als vegetarische Variante. Der Übergangsgraph gibt an, wie sich die Wahl der Kunden pro Tag verändert. Am 20.8.2016 wählen 25% Menü A, 60% Menü B und 15% Menü C.

a. Wie sieht die Wahl am 21.8.2016 aus?
b. Wie sieht die Verteilung nach 3 Tagen aus?
c. Nach einer Woche wird in Deutschland ein Gammelfleischskandal aufgedeckt. Daraufhin wird das Fleischgericht nur noch in 5% der Fälle wiedergewählt, 60% wechseln täglich zum Fisch und 35% täglich zum vegetarischen Gericht. Die Fischesser und Vegetarier bleiben bei ihrer Wahl und wechseln überhaupt nicht mehr. Wie viel Prozent der Kunden essen nach 2 Tagen noch Fleisch und wie viele bestellen das vegetarische Gericht?



a. $$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}6 \\ 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}275 \\ 0{,}275 \end{pmatrix}$$

Am 21.8.2016 essen 45% Fleisch, 27,5% Fisch und 27,5% das vegetarische Gericht.

b. $$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}6 \\ 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33705 \\ 0{,}2942 \\ 0{,}36875 \end{pmatrix}$$

Nach 3 Tagen essen 34,65% Fleisch, 28,475% Fisch und 36,875% das vegetarische Gericht.

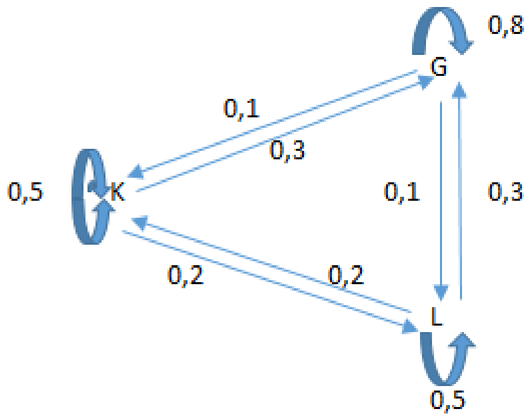
c. Nach 7 Tagen: $$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}^7 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}6 \\ 0{,}15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3162 \\ 0{,}2857 \\ 0{,}398 \end{pmatrix}$$

Verteilung 2 Tage nach dem Skandal:

$$\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 1 & 0 \\ 0{,}35 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3162 \\ 0{,}2857 \\ 0{,}398 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}00079 \\ 0{,}484942 \\ 0{,}514268 \end{pmatrix}$$

2 Tage nach dem Skandal essen nur noch 0,079% Fleisch, 51,42 % das vegetarische Gericht.

6. Auf der Erde gab es im Jahr 2010 ungefähr 7,2 Milliarden Menschen. Davon lebten ca. 1,8 Milliarden in Kleinstädten (K), 3,4 Milliarden auf dem Land (L) und 2 Milliarden in Großstädten (G). Eine Forschergruppe prognostiziert die folgenden Wanderbewegungen der Menschen:



a. Berechnen Sie die Verteilung der Menschen nach einem Jahr bei gleichbleibender Bevölkerungszahl!
b. Berechnen Sie, wie viele Menschen bei konstanter Bevölkerungszahl nach 3 Jahren auf dem Land und in die Großstadt leben!
c. Berechnen Sie die Anzahl der Menschen, die nach einem Jahr in den Großstädten lebt, wenn die Bevölkerung, die in dem Jahr in den Großstädten geblieben ist, in dem Jahr um 1% wächst!

a.

von nach	K	L	G
K	0,5	0,2	0,1
L	0,2	0,5	0,1
G	0,3	0,3	0,8

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{1,8}/_{7,2} \\ {}^{3,4}/_{7,2} \\ {}^{2}/_{7,2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,2472 \\ 0,3138 \\ 0,4388 \end{pmatrix}$$

Nach einem Jahr leben ca. 24,72% in Kleinstädten, 31,38% auf dem Land und 43,88% in Großstädten.

b. $$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} {}^{1,8}/_{7,2} \\ {}^{3,4}/_{7,2} \\ {}^{2}/_{7,2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,217139 \\ 0,223139 \\ 0,559722 \end{pmatrix}$$

$0,223139 \cdot 7,2 = 1,6066$
$0,559722 \cdot 7,2 = 4,03$

Nach 3 Jahren leben 1.606.600.000 Menschen auf dem Land und 4.030.000.000 Menschen in der Großstadt.

c. $0,4388 \cdot 7,2 + 0,01 \cdot 0,8 \cdot 2 = 3,17536$
(Anteil nach 1 Jahr + 1% von den 80%, die in der Großstadt verbleiben)

Es leben dann 3.175.360.000 Menschen in Großstädten.

7. In einer Stadt leben 120.000 Menschen im erwerbsfähigen Alter. Zu Beginn des Jahres 2017 sind 8% arbeitslos (A), 50% in Teilzeit oder Minijobs (T/M) und 42% in Vollzeit (V) beschäftigt. Die folgende Übergangstabelle zeigt die Veränderung der Beschäftigungsverhältnisse pro Jahr:

von nach	A	T/M	V
A	0,8	0,2	0,1
T/M	0,15	0,6	0,1
V	0,05	0,2	0,8

a. Wie sieht die Verteilung nach einem Jahr aus?
b. Beschreiben Sie die Entwicklung auf dem Arbeitsmarkt der Stadt in den ersten drei Jahren!

120.000 · 0,08 = 9600
120.000 · 0,5 = 60.000
120.000 · 0,42 = 50.400

a. $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9600 \\ 60000 \\ 50400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24720 \\ 42480 \\ 52800 \end{pmatrix}$$

Die Zahl der Arbeitslosen hat sich mit 24.720 Arbeitslosen mehr als verdoppelt, die Teilzeitbeschäftigten mit 42,480 stark verringert und die Anzahl der Vollbeschäftigten ist fast gleichgeblieben.

b. $$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 9600 \\ 60000 \\ 50400 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 38934 \\ 30916 \\ 50150 \end{pmatrix}$$

Nach drei Jahren ist die Arbeitslosenzahl von 9600 auf 38.934 stark gestiegen, die Anzahl der Teilzeitbeschäftigten hat sich fast halbiert und die Vollbeschäftigungsquote ist fast konstant geblieben.

8. In einer Kleinstadt gibt es drei Grundschulen. Zum Schuljahr 2016 gehen 28,5% regelmäßig in die Grundschule A, 25 % in die Grundschule B und 46,5% gehen in die Grundschule C. Die folgende Übergangstabelle zeigt die Wanderung der Grundschüler pro Schuljahr.

von nach	A	B	C
A	0,4	0,2	0,1
B	0,25	0,6	0,2
C	0,35	0,2	0,7

a. Berechnen Sie die Verteilung der Grundschüler nach einem Jahr!
b. Berechnen Sie die Verteilung der Grundschüler ein Jahr **zuvor**!

$$a. \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}285 \\ 0{,}25 \\ 0{,}465 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2105 \\ 0{,}31425 \\ 0{,}47525 \end{pmatrix}$$

Nach einem Jahr gehen 21,05% auf die Grundschule A, 31,425% auf die Grundschule B und 47,525% auf die Grundschule C.

$$b. \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}285 \\ 0{,}25 \\ 0{,}465 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 0{,}4x + 0{,}2y + 0{,}1z = 0{,}285 \\ 0{,}25x + 0{,}6y + 0{,}2z = 0{,}25 \\ 0{,}35x + 0{,}2y + 0{,}7z = 0{,}465 \end{array} \right| \Leftrightarrow x = 0{,}6,\ y = 0{,}05,\ z = 0{,}35$$

Im Schuljahr zuvor gingen 60% auf die Grundschule A, 5% auf die Grundschule B und 35% auf die Grundschule C.

9. In einer Kleinstadt gibt es drei Grundschulen. Zum Schuljahr 2017 gehen 240 Kinder regelmäßig in die Grundschule A, 150 in die Grundschule B und 320 gehen in die Grundschule C. Die folgende Übergangstabelle zeigt die Wanderung der Grundschüler pro Schuljahr:

von nach	A	B	C
A	0,4	0,2	0,3
B	0,25	0,6	x
C	0,35	0,2	0,7−x

a. Beschreiben Sie, was x angibt!
b. Berechnen Sie x so, dass am Ende eines Schuljahres 214 Schüler zur Grundschule B gehen!

a. X gibt den Anteil der Kinder an, die nach einem Jahr von der Grundschule C zur Grundschule B wechseln!

b. $0{,}25 \cdot 240 + 0{,}6 \cdot 150 + x \cdot 320 = 214$

$\Leftrightarrow 150 + x \cdot 320 = 214$

$\Leftrightarrow 320x = 64$

$\Leftrightarrow x = 0{,}2$

x muss 0,2 sein, d.h. 20% der Kinder wechseln von der Grundschule C zur Grundschule B.