Lösungen zu den Übungen zur Standardabweichung σ

Aufgabe | **Lösung**

Aufgabe

1. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Zufallsgröße X und die gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen!

a.

a	-1	0	1	2
P(X = a)	0,25	0,2	0,3	0,25

b.

a	-100	0	10	40
P(X = a)	0,2	0,25	0,45	0,1*

c.

a	-10	0	5	10
P(X = a)	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$

Lösung

a. $E(X) = -1 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}55$

$\sigma = \sqrt{(-1-0{,}55)^2 \cdot 0{,}25 + (0-0{,}55)^2 \cdot 0{,}2 + (1-0{,}55)^2 \cdot 0{,}3 + (2-0{,}55)^2 \cdot 0{,}25}$

$= 1{,}11692$

b. *$1-0{,}2-0{,}25-0{,}45 = 0{,}1$

$E(X) = -100 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}45 + 40 \cdot 0{,}1 = -11{,}5$

$\sigma = \sqrt{(-100-(-11{,}5))^2 \cdot 0{,}2 + (0+11{,}5)^2 \cdot 0{,}25 + (10+11{,}5)^2 \cdot 0{,}45 + (40+11{,}5)^2 \cdot 0{,}1}$

$= 45{,}5275$

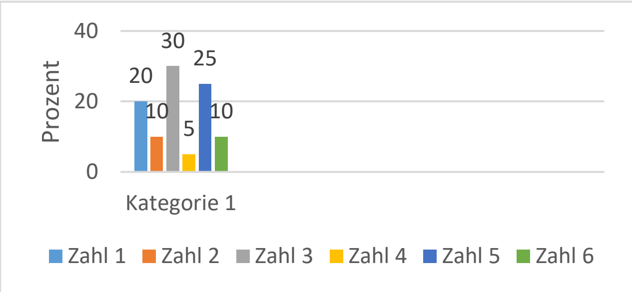
c. $E(X) = -10 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{1}{16} + 10 \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{16} = 1{,}5625$

$\sigma = \sqrt{\left(-10-\frac{25}{16}\right)^2 \cdot \frac{3}{16} + \left(0-\frac{25}{16}\right)^2 \cdot \frac{7}{16} + \left(5-\frac{25}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{16} + \left(10-\frac{25}{16}\right)^2 \cdot \frac{5}{16}}$

$= 7{,}00864$

Aufgabe

2. Bei einem Würfelspiel wurden die Zahlen 1 bis 6 mit folgenden Häufigkeiten gewürfelt:



Ermitteln Sie die Standardabweichung!

Lösung

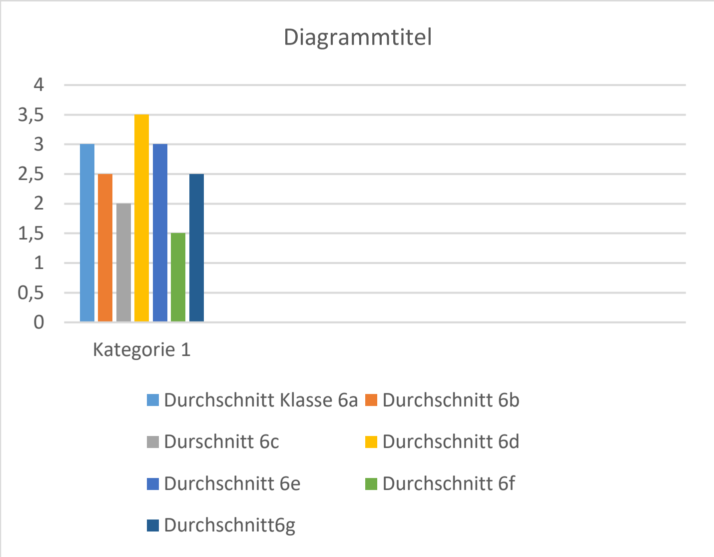
$E(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}1 = 3{,}35$

$\sigma =$

$\sqrt{(1-3{,}35)^2 \cdot 0{,}2 + (2-3{,}35)^2 \cdot 0{,}1 + (3-3{,}35)^2 \cdot 0{,}3 + (4-3{,}35)^2 \cdot 0{,}05 + (5-3{,}35)^2 \cdot 0{,}25 + (6-3{,}35)^2 \cdot 0{,}1}$

$\approx 1{,}65$

3. In einer Vergleichsarbeit der 6. Klassen werden folgende Durchschnittsnoten ermittelt:



Eine Klassenarbeit muss neu geschrieben werden, wenn ihr Durchschnitt um mehr als die Standardabweichung vom Mittelwert aller Klassenarbeiten abweicht. Ermitteln Sie, wann das der Fall ist und ob eine Klasse ihre Klassenarbeit wiederholen muss!

$E(X) = \frac{3+2,5+2+3,5+3+1,5+2,5}{7} = \frac{18}{7} \approx 2,57$

$\sigma = \sqrt{\left(3-\frac{18}{7}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} + \left(2,5-\frac{18}{7}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} + \left(2-\frac{18}{7}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} + \left(3,5-\frac{18}{7}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} + \left(3-\frac{18}{7}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} + \left(1,5-\frac{18}{7}\right)^2 \cdot \frac{1}{7} + \left(2,5-\frac{18}{7}\right)^2 \cdot \frac{1}{7}}$

$= \sqrt{\frac{1}{7} \cdot \left[\left(3-\frac{18}{7}\right)^2 + \left(2,5-\frac{18}{7}\right)^2 + \left(2-\frac{18}{7}\right)^2 + \left(3,5-\frac{18}{7}\right)^2 + \left(3-\frac{18}{7}\right)^2 \left(1,5-\frac{18}{7}\right)^2 + \left(2,5-\frac{18}{7}\right)^2\right]}$

$\approx 0,6227$

Man unterscheidet 2 Fälle: (Alternativ rechnet man mit dem Betrag)

$x > \frac{18}{7}$: $x > \frac{18}{7} + 0,6227 \Leftrightarrow x > 3,194$

oder $x < \frac{18}{7}$: $x < \frac{18}{7} - 0,6227 \Leftrightarrow x < 1,949$

Das bedeutet, dass der Durchschnitt der Klasse 6d darüber und der Durchschnitt der Klasse 6f darunter liegen und sie daher ihre Klassenarbeiten wiederholen müssten.

4. In einem Mathematikkurs wird gemessen, wie groß die Schüler sind!

Schüler	Größe		
A	1,82	F	1,85
B	1,78	G	1,82
C	1,94	H	1,92
D	1,90	i	1,78
E	1,70	j	1,94

a. Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Messgrößen!

b. Wie viel Prozent der Schüler weichen mehr als die Standardabweichung vom Mittelwert ab?

a. $E(X) = \frac{1,82+1,78+1,94+1,9+1,7+1,85+1,82+1,92+1,78+1,94}{10} = 1,845$

Der Mittelwert ist 1,845m

$\sigma =$

$= \sqrt{\frac{1}{10} \cdot [(1,82-1,845)^2 + (1,78-1,845)^2 + (1,94-1,845)^2 + (1,9-1,845)^2 + (1,7-1,845)^2 + (1,85-1,845)^2 + \cdots + (1,94-1,845)^2]}$

$= \sqrt{\frac{0,0631}{10}} \approx \sqrt{0,00631} \approx 0,0757$

Die Standardabweichung ist 7,6 cm.

b. $x > 1,845 + 0,0757 = 1,9207$ oder $x < 1,845 - 0,0757 = 1,7693$ also $x \in [1,77;1,92]$
d.h. Schüler C, E und I weichen in ihrer Größe zu sehr ab, das sind genau 30%.

5. Im Physikunterricht machen 2 Gruppen das gleiche Experiment. Untersuchen Sie die Standardabweichung der beiden Messreihen! Welche der beiden Gruppen hat genauer gearbeitet?

Messung 1:

Versuch	1	2	3	4	5	6	7
Ergebnis	3,012	3,02	2,98	2,4	3,2	2,94	2,748

Messung 2:

Versuch	1	2	3	4	5	6	7
Ergebnis	3,01	2,92	2,9	3,22	3,18	2,6	2,47

$E(X_1) = \frac{3{,}012+3{,}02+2{,}98+2{,}4+3{,}2+2{,}94+2{,}748}{7} = 2{,}9$

$E(X_2) = \frac{3{,}01+2{,}92+2{,}9+3{,}22+3{,}18+2{,}6+2{,}47}{7} = 2{,}9$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot [(3{,}012 - 2{,}9)^2 + (3{,}02 - 2{,}9)^2 + (2{,}98 - 2{,}9)^2 + (2{,}4 - 2{,}9)^2 + (3{,}2 - 2{,}9)^2 + (2{,}94 - 2{,}9)^2 + (2{,}748 - 2{,}9)^2]}$

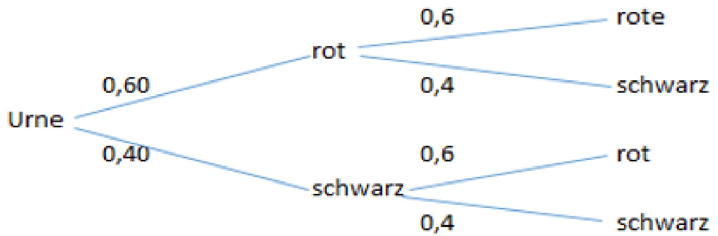
$\approx 0{,}238$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot [(3{,}01 - 2{,}9)^2 + (2{,}92 - 2{,}9)^2 + (2{,}9 - 2{,}9)^2 + (3{,}22 - 2{,}9)^2 + (3{,}18 - 2{,}9)^2 + (2{,}6 - 2{,}9)^2 + (2{,}47 - 2{,}9)^2]}$

$\approx 0{,}259$

Da die Standardabweichung der ersten Gruppe geringer ist, hat sie genauer gearbeitet.

6. Aus einer Urne, in der sich 12 rote und 8 schwarze Kugeln befinden, werden zufällig 2 Kugeln gezogen. Die Kugeln werden wieder zurückgelegt. Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Zeichnen sie ein Baumdiagramm und berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung!



$E(X) = 0 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0 \cdot 0{,}36 + 1 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}16 = 0{,}8$

$\sigma = \sqrt{(0 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}36 + (1 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}48 + (2 - 0{,}8)^2 \cdot 0{,}16} \approx 0{,}693$

7. Ein Losverkäufer nimmt 2 € pro Los. 80% der Lose sind Nieten, bei 4% der Lose gewinnt man 20€, bei 6 % der Lose 10€ und bei 10% gewinnt man 5€. Die Zufallsgröße X beschreibt den Gewinn/Verlust des Losverkäufers. Berechnen Sie die Standardabweichung!

$E(X) = 2 \cdot 0{,}8 + (-18^*) \cdot 0{,}04 + (-8) \cdot 0{,}06 + (-3) \cdot 0{,}1 = 0{,}1$ * 2€ Einnahme −20€ Ausgabe4

$\sigma = \sqrt{(2 - 0{,}1)^2 \cdot 0{,}8 + (-18 - 0{,}1)^2 \cdot 0{,}04 + (-8 - 0{,}1)^2 \cdot 0{,}06 + (-3 - 0{,}1)^2 \cdot 0{,}1} \approx 4{,}57$