

## Lösungen zu den Übungen zum Erwartungswert

Übung	Lösung																																
<p>1. In einem Mathematikkurs wird gemessen, wie groß die Schüler sind! Berechnen Sie die mittlere Größe!</p> <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Schüler</th> <th>Größe</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>A</td><td>1,82</td></tr> <tr><td>B</td><td>1,78</td></tr> <tr><td>C</td><td>1,94</td></tr> <tr><td>D</td><td>1,90</td></tr> <tr><td>E</td><td>1,70</td></tr> <tr><td>F</td><td>1,85</td></tr> <tr><td>G</td><td>1,82</td></tr> <tr><td>H</td><td>1,92</td></tr> <tr><td>I</td><td>1,78</td></tr> <tr><td>J</td><td>1,94</td></tr> <tr><td>K</td><td>1,91</td></tr> <tr><td>L</td><td>1,83</td></tr> <tr><td>M</td><td>1,95</td></tr> <tr><td>N</td><td>1,81</td></tr> </tbody> </table>	Schüler	Größe	A	1,82	B	1,78	C	1,94	D	1,90	E	1,70	F	1,85	G	1,82	H	1,92	I	1,78	J	1,94	K	1,91	L	1,83	M	1,95	N	1,81	<p><math>\bar{m} = \frac{1,82+1,78+1,94+1,9+1,7+1,85+1,82+1,92+1,78+1,94+1,91+1,83+1,95+1,81}{14}</math>  <math>= \frac{25,95}{14} \approx 1,85</math></p> <p>Die mittlere Größe ist 1,85m.</p>		
Schüler	Größe																																
A	1,82																																
B	1,78																																
C	1,94																																
D	1,90																																
E	1,70																																
F	1,85																																
G	1,82																																
H	1,92																																
I	1,78																																
J	1,94																																
K	1,91																																
L	1,83																																
M	1,95																																
N	1,81																																
<p>2. In zwei Untersuchungen zum Essverhalten in 2 Ländern wird gefragt, wieviel Gramm Obst eine Person pro Tag isst. Es wurden die folgenden Werte angegeben:</p> <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Anzahl der Probanden im Land 1</th> <th>verzehrtes Obst in Gramm</th> <th>Anzahl der Probanden im Land 2</th> <th>verzehrtes Obst in Gramm</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>26</td><td>0</td><td>10</td><td>0</td></tr> <tr><td>20</td><td>50</td><td>31</td><td>50</td></tr> <tr><td>10</td><td>100</td><td>5</td><td>100</td></tr> <tr><td>22</td><td>150</td><td>10</td><td>150</td></tr> <tr><td>12</td><td>200</td><td>16</td><td>200</td></tr> <tr><td>6</td><td>500</td><td>18</td><td>600</td></tr> <tr><td>4</td><td>700</td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>Berechnen Sie den jeweiligen Erwartungswert! Welches Land isst gesünder?</p>	Anzahl der Probanden im Land 1	verzehrtes Obst in Gramm	Anzahl der Probanden im Land 2	verzehrtes Obst in Gramm	26	0	10	0	20	50	31	50	10	100	5	100	22	150	10	150	12	200	16	200	6	500	18	600	4	700			<p><math>E(X) = \frac{26 \cdot 0 + 20 \cdot 50 + 10 \cdot 100 + 22 \cdot 150 + 12 \cdot 200 + 6 \cdot 500 + 4 \cdot 700}{100} = \frac{13500}{100} = 135</math></p> <p><math>E(X) = \frac{10 \cdot 0 + 31 \cdot 50 + 5 \cdot 100 + 10 \cdot 150 + 16 \cdot 200 + 18 \cdot 600}{90} = \frac{17550}{90} = 195</math></p> <p>Im Land 1 essen die Personen im Schnitt weniger Obst als im Land 2, daher isst die Versuchsgruppe des Landes 2 gesünder.</p>
Anzahl der Probanden im Land 1	verzehrtes Obst in Gramm	Anzahl der Probanden im Land 2	verzehrtes Obst in Gramm																														
26	0	10	0																														
20	50	31	50																														
10	100	5	100																														
22	150	10	150																														
12	200	16	200																														
6	500	18	600																														
4	700																																

3. Vervollständigen Sie die Tabelle und berechnen Sie den Erwartungswert!

a	-10	0	10	50
P(X=a)	0,4	0,1	0,3	

a	-10	0	10	50
P(X=a)	0,4	0,1	0,3	0,2*

$$*1 - 0,4 - 0,1 - 0,3 = 0,2$$

$$E(X) = 0,4 \cdot (-10) + 0,3 \cdot 10 + 50 \cdot 0,2 = 9$$

4. Aus einer Urne mit 12 roten und 20 grünen Kugeln werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. X sei die Anzahl der gezogenen grünen Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X!

a	0	1	2
P(X=a)	$\frac{12}{32} \cdot \frac{12}{32} = \frac{9}{64}$	$\frac{12}{32} \cdot \frac{20}{32} + \frac{20}{32} \cdot \frac{12}{32} = \frac{15}{32}$	$\frac{20}{32} \cdot \frac{20}{32} = \frac{25}{64}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{15}{32} + 2 \cdot \frac{25}{64} = \frac{80}{64} \approx 1,25$$

Im Schnitt werden 1,25 grüne Kugeln gezogen.

5. Ein Losverkäufer nimmt 2 € pro Los. 80% der Lose sind Nieten, bei 2% der Lose gewinnt man 20€, bei 5 % der Lose 10€ und bei 13% gewinnt man 5€. Berechnen Sie, ob der Losverkäufer auf lange Sicht einen Gewinn pro Los macht!

Gewinn/Verlust	2	-18*	-8	-3
P(X=a)	0,8	0,02	0,05	0,13

\*2€ Einnahmen – 20€ Ausgabe

$$E(X) = 2 \cdot 0,8 - 18 \cdot 0,02 - 8 \cdot 0,05 - 3 \cdot 0,13 = 0,45$$

Auf lange Sicht macht der Losverkäufer 0,45 € Gewinn pro Los.

6. Ein Losverkäufer verkauft Lose. 80% der Lose sind Nieten, bei 6% der Lose gewinnt man 10€, bei 5 % der Lose 5€ und bei 9% gewinnt man 2€.

a. Berechnen Sie, wieviel ein Los kosten muss, damit der Losverkäufer auf lange Sicht einen Gewinn pro Los macht!

b. Berechnen Sie, wieviel ein Los kosten muss, damit der Losverkäufer auf lange Sicht einen Gewinn von 1€ pro Los macht!

Gewinn/Verlust	x*	x-10	x-5	x-2
P(X=a)	0,8	0,06	0,05	0,09

\*x = Preis des Loses in €

a.  $E(X) = 0$

$$\Leftrightarrow E(X) = x \cdot 0,8 + (x - 10) \cdot 0,06 + (x - 5) \cdot 0,05 + (x - 2) \cdot 0,09 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,8x + 0,06x - 0,6 + 0,05x - 0,25 + 0,09x - 0,18 = 0 \Leftrightarrow x - 1,03 = 0 \Leftrightarrow x = 1,03$$

Der Losverkäufer sollte mehr als 1,03€ pro Los verlangen.

b.  $E(X) = 1 \Leftrightarrow x - 1,03 = 1 \Leftrightarrow x = 2,03$

Um einen Gewinn von 1€ pro Los machen zu können, sollte er 2,03€ pro Los verlangen.

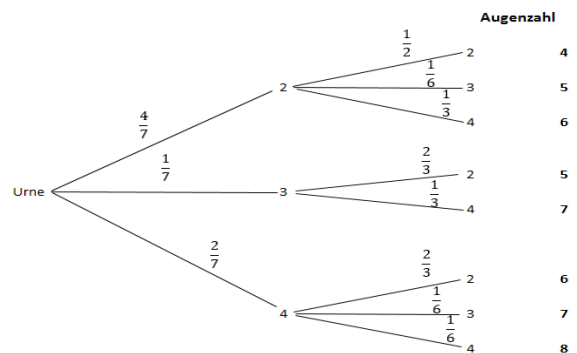
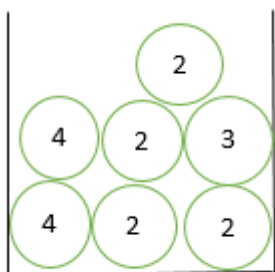
7. Bei einem Würfelspiel mit zwei Würfeln erhält man 1€, wenn man eine Würfelsumme von 4, 5 oder 6 hat, und 2 €, wenn man eine Würfelsumme von 3 oder 8 hat. Man muss 3€ bezahlen, wenn man eine Summe von 2, 7,9, 10 würfelt. Bei einer Würfelsumme von 11 oder 12 erhält man nichts. Gewinnt oder verliert man bei diesem Spiel langfristig?

X = Würfelsumme	P(X)	Y = Gewinn/Verlust in €	Erklärung
2	$\frac{1}{36}$ *	-3	$*\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(1) \cdot P(1)$
3	$\frac{2}{36}$ **	2	
4	$\frac{3}{36}$	1	$**\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = P(1) \cdot P(2) + P(2) \cdot P(1)$ Rest analog
5	$\frac{4}{36}$	1	
6	$\frac{5}{36}$	1	
7	$\frac{6}{36}$	-3	
8	$\frac{5}{36}$	2	
9	$\frac{4}{36}$	-3	
10	$\frac{3}{36}$	-3	
11	$\frac{2}{36}$	0	
12	$\frac{1}{36}$	0	

$$E(X) = \frac{1}{36} \cdot (-3) + \frac{2}{36} \cdot 2 + \frac{3}{36} \cdot 1 + \frac{4}{36} \cdot 1 + \frac{5}{36} \cdot 1 + \frac{6}{36} \cdot (-3) + \frac{5}{36} \cdot 2 + \frac{4}{36} \cdot (-3) + \frac{3}{36} \cdot (-3) = -\frac{4}{9}$$

Man verliert langfristig, da der Erwartungswert negativ ist.

8. Aus einer Urne werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X sei die Summe der beiden Kugeln. Berechnen Sie den Erwartungswert!



$$E(X) = 4 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \left[ \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \right] + 6 \cdot \left[ \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} \right] + 7 \cdot \left[ \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \right] + 8 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{38}{7} \approx 5,43$$