Lösungen zu den Übungen zu Binomialverteilungen 1 Berechnung der Wahrscheinlichkeit B(n;p,k) bei k Treffern

Formeln: $\mathbf{B_{n;p}(r)} = \binom{n}{r}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$ mit $\binom{n}{r} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ $\mathbf{F_{n;p}(r)} = B_{n;p}(r) + B_{n;p}(r-1) + B_{n;p}(r-2) + \ldots + B_{n;p}(0)$

Aufgabe	Lösung
1. Eine Münze wird 8mal geworfen. a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint 6mal das Wappen? b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint weniger als 2mal Wappen? c. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint mehr als 5mal das Wappen?	a. $B_{8;0,5}(6) = \binom{8}{6}\cdot 0{,}5^6\cdot 0{,}5^2 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)\cdot(1\cdot2)}\cdot 0{,}5^8 = \frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot 0{,}5^8 = 0{,}109375$* **Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10,937% erscheint 6mal das Wappen.** b. $B_{8;0,5}(0) + B_{8;0,5}(1) = \binom{8}{0}\cdot 0{,}5^0\cdot 0{,}5^8 + \binom{8}{1}\cdot 0{,}5^1\cdot 0{,}5^7 = 1\cdot 0{,}5^8 + 8\cdot 0{,}5^8 \approx 0{,}0352$ **Mit einer Wahrscheinlichkeit von 3,52% erscheint weniger als 2mal das Wappen.** c. $B_{8;0,5}(6) + B_{8;0,5}(7) + B_{8;0,5}(8) = \binom{8}{6}\cdot 0{,}5^6\cdot 0{,}5^2 + \binom{8}{7}\cdot 0{,}5^7\cdot 0{,}5^1 + \binom{8}{8}\cdot 0{,}5^8\cdot 0{,}5^0$ $= \frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot 0{,}5^8 + 1\cdot 0{,}5^8 + 8\cdot 0{,}5^8 \approx 0{,}1445$ **Mit einer Wahrscheinlichkeit von 14,45% erscheint mehr als 5mal das Wappen.** *$\binom{8}{6}$ kann man mit dem TR (TI-nspire) mit nCR(8,6) ausrechen bzw. mit menü 5->3 * $B_{8;0,5}(6)$kann man mit binomPdf (8,0.5,5) ausrechnen bzw. mit menü 5->5->D
2. Ein Multiple-Choice –Test in Mathematik besteht aus 40 Fragen. Zu jeder Frage gibt es 4 Antworten, von denen genau ein richtig ist. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler, der nicht gelernt hat, durch bloßes Raten 10 richtige Antworten ankreuzt?	$B_{40;0,25}(10) = \binom{40}{10}\cdot 0{,}25^{10}\cdot 0{,}75^{30} \approx 0{,}1444$ **Mit einer Wahrscheinlichkeit von 14,44% kreuzt man 10 Fragen durch bloßes Raten richtig an.**
3. In einer Urne liegen 8 rote und 14 schwarze Kugeln. Die Kugeln werden nach jedem Ziehen wieder zurückgelegt. a. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10maligem Ziehen 3mal Rot gezogen wird? b. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6maligem Ziehen höchsten 4mal Schwarz gezogen wird?	a. $B_{10;\frac{8}{22}}(3) = \binom{10}{3}\cdot\left(\frac{8}{22}\right)^3\cdot\left(\frac{14}{22}\right)^7 \approx 0{,}2438$ **Mit einer Wahrscheinlichkeit von 24,38% werden 3 rote Kugeln gezogen.** b. $B_{6;\frac{14}{22}}(0) + B_{6;\frac{14}{22}}(1) + B_{6;\frac{14}{22}}(2) + B_{6;\frac{14}{22}}(3) + B_{6;\frac{14}{22}}(4)$ oder $1 - B_{6;\frac{14}{22}}(6) + B_{6;\frac{14}{22}}(5)$ $= 1 - \binom{6}{6}\cdot\left(\frac{14}{22}\right)^6\cdot\left(\frac{8}{22}\right)^0 + \binom{6}{5}\cdot\left(\frac{14}{22}\right)^5\cdot\left(\frac{8}{22}\right)^1 \approx 1 - 0{,}2941 \approx 0{,}7059$* **Mit einer Wahrscheinlichkeit von 70,59% werden höchstens 4 schwarze Kugeln gezogen.** *alternativ: $B_{6;\frac{14}{22}}(0) + B_{6;\frac{14}{22}}(1) + B_{6;\frac{14}{22}}(2) + B_{6;\frac{14}{22}}(3) + B_{6;\frac{14}{22}}(4) = F_{6;\frac{14}{22}}(4)$ mit TR binomCfd berechnen

4. Ein Losverkäufer verkauft Lose. 10% seiner Lose sind Gewinne.
a. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6maligem Ziehen 2 Gewinne gezogen werden?
b. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 8maligem Ziehen höchsten 3 Nieten gezogen werden?

a. $B_{6;0,1}(2) = \binom{6}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^4 \approx 0{,}0984$

Man zieht mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,84% zwei Gewinne.

b. $B_{8;0,9}(3) + B_{8;0,9}(2) + B_{8;0,9}(1) + B_{8;0,9}(0) =$

$\binom{8}{3} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^5 + \binom{8}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^6 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^7 + \binom{8}{0} \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^8 \approx 0{,}000432$*

Man zieht mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,043% höchstens 3 Nieten.

*alternativ: $B_{8;0,9}(3) + B_{8;0,9}(2) + B_{8;0,9}(1) + B_{8;0,9}(0) = F_{8;0,9}(3)$

$F_{8;0,9}(3)$ mit TR binomCfd (100, 0.8, 0,3) berechnen

5. Etwa 80% der Deutschen beschäftigen ihre Haushaltshilfen schwarz.
a. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Stichprobe des Amtes von 100 Haushalten genau 90 ihre Haushaltshilfe nicht angemeldet haben?
b. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Stichprobe des Amtes von 100 Haushalten zwischen 90 und 95 ihre Haushaltshilfe nicht angemeldet haben?

a. $B_{100;0,8}(90) = \binom{100}{90} \cdot 0{,}8^{90} \cdot 0{,}2^{10} \approx 0{,}00336$

Man trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3% genau 90 nicht angemeldete Haushaltshilfen an.

b. $B_{100;0,8}(90) + B_{100;0,8}(91) + B_{100;0,8}(92) + B_{100;0,8}(93) + B_{100;0,8}(94) + B_{100;0,8}(95) =$

$F_{100;0,8}(95) - F_{100;0,8}(89) = 0{,}999996 - 0{,}994304 = 0{,}005692$*

Man trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,56% zwischen 90 und 95 nicht angemeldete Haushaltshilfen an.

* $F_{100;0,8}(95) - F_{100;0,8}(89)$ kann man mit dem TR mit binomCfd (100, 0.8, 90,95) oder mit menu5->5-> E ausrechnen

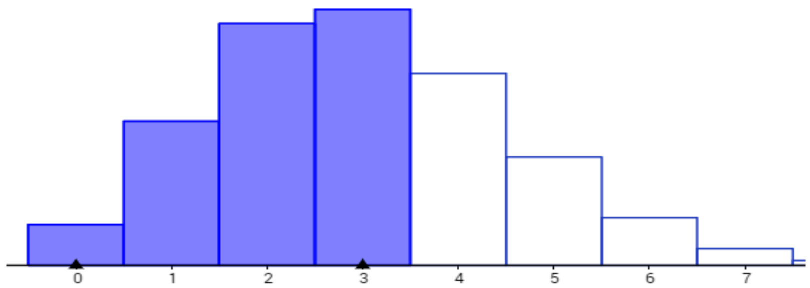
6. Eine Kopfschmerztablette wirkt in 85% aller Anwendungen.
a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 Patienten, die die Tablette nehmen, genau 3 sind, die keine Wirkung verspüren?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 Patienten, die die Tablette nehmen, höchstens 3 sind, die keine Wirkung verspüren?

a. $B_{20;0,15}(3) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^{17} \approx 0{,}2428$

Die Wahrscheinlichkeit, genau 3 Patienten anzutreffen, ist ungefähr 24,28%.

b. $B_{20;0,15}(3) + B_{20;0,15}(2) + B_{20;0,15}(1) + B_{20;0,15}(0) = F_{20;0,15}(3) \approx 0{,}6477$

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens 3 Patienten anzutreffen, ist ungefähr 64,77%.



k	P(X = k)
0	0.0388
1	0.1368
2	0.2293
3	0.2428

*mit geogebra